5307

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 129.

In vier Heften.

Mit einem Bildnis Dirichlets.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 129.

Dedekind, R., Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen . . . . . Seite 1

Frobenius, G., Zur Theorie der linearen Gleichungen . . . . . — 175

Hensel, K., Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten — 68

Hilbert, D., Über das *Dirichlet*sche Prinzip . . . . . — 63

Hurwitz, A., Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen . . . . . — 187

Klein, F., Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades . . . . . — 151

Mertens, F., Ein Beweis des Satzes, daß jede Klasse von ganzzahligen primitiven binären quadratischen Formen des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht . . . . . — 181

Minkowski, H., Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz . . . — 220

Mirimanoff, D. und **Hensel, K.,** Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité . . . . . — 86

Picard, E., Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes . — 275

Poincaré, H., Sur les Invariants Arithmétiques . . . . . — 89

Schlesinger, L., Über die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte . . . . . — 287

Steinitz, E., Über die Anziehung hyperboloidischer Schalen . . . . . — 295

Weber, H., Über komplexe Primzahlen in Linearformen . . . . . — 35

Wirtinger, W., Über eine besondere *Dirichlet*sche Reihe . . . . . — 214

153141

DEM ANDENKEN

LEJEUNE DIRICHLETS

13. FEBRUAR 1905.

G. LEJEUNE-DIRICHLET

* 13. Februar 1805 † 5. Mai 1859.

Gez. v. W. Hensel.

Verlag von Georg Reimer, Berlin.

Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen.

Von Herrn *R. Dedekind*.

Bei der Besprechung der in lineare Faktoren zerlegbaren Formen, welche zu einem endlichen algebraischen Zahlkörper gehören, habe ich bemerkt, daß die drei Formen, deren eine durch eine bilineare Substitution in das Produkt der beiden anderen übergeht, im wesentlichen, d. h. abgesehen von konstanten Faktoren, umgekehrt durch diese Substitution bestimmt sind.*) In dem einfachsten Falle der binären quadratischen Formen ist diese Tatsache zwar nicht ausdrücklich von *Gauß* ausgesprochen, aber sie ist vollständig in der Schlußbemerkung des Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae enthalten, in welchem die Transformation einer Form in ein Produkt aus zwei Formen durch eine bilineare Substitution in der allgemeinsten Weise behandelt wird. Bei meinem ersten Studium dieser Untersuchung erregte die genannte Tatsache meine besondere Aufmerksamkeit, und ich erkannte bald, daß mit einer solchen gegebenen Substitution immer zwei andere Substitutionen und drei quadratische Formen von der Art verbunden sind, daß jede der drei Formen durch eine ihr entsprechende Substitution in das Produkt der beiden anderen Formen übergeht. Hat man sich hiervon überzeugt, was bei zweckmäßiger Wahl der Bezeichnung keine Schwierigkeit darbietet, so wird die Lösung des allgemeinen von *Gauß* behandelten Problems in hohem Grade vereinfacht. Da dies noch nicht bekannt zu sein scheint, so wage ich es, meine Untersuchung zu veröffent-

*) *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, § 182, S. 586.

lichen und dem Andenken an meinen großen Lehrer *Dirichlet* zu widmen, der selbst eine Ehre darein gesetzt hat, durch eine Reihe von Abhandlungen das Verständnis des von ihm am höchsten bewunderten Werkes von *Gauß* zu erleichtern.

§ 1.

Wir betrachten im Folgenden drei Paare von unabhängigen Variabeln

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3)$$

und zwei Reihen von je vier willkürlichen Konstanten

$$\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$$
$$\beta = \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3.$$

Bedeutet $r, s, t,$ wie immer im folgenden, irgend eine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3 (während der Index 0 ungeändert bleibt), so dürfen wir jeden aus den Variabeln und Konstanten gebildeten Ausdruck, der in bezug auf die beiden Indizes s, t *symmetrisch* ist, als eine durch den Index r bestimmte Größe ansehen und demgemäß bezeichnen. In diesem Sinne bilden wir drei binäre quadratische Formen F_1, F_2, F_3 durch die gemeinsame Definition

$$(1.)\quad \begin{cases} F_r = F_r(x_r, y_r) = A_r x_r^2 + B_r x_r y_r + C_r y_r^2 \\ = (\beta_s x_r + \alpha_t y_r)(\beta_t x_r + \alpha_s y_r) - (\alpha_r x_r + \beta_0 y_r)(\alpha_0 x_r + \beta_r y_r), \end{cases}$$

wo also

$$(2.)\quad \begin{cases} A_r = \beta_s \beta_t - \alpha_0 \alpha_r,\ C_r = \alpha_s \alpha_t - \beta_0 \beta_r, \\ B_r = \alpha_s \beta_s + \alpha_t \beta_t - \alpha_r \beta_r - \alpha_0 \beta_0. \end{cases}$$

Wir wollen beweisen, *daß diese drei Formen ein und dieselbe Diskriminante*

$$(3.)\qquad D = B_1^2 - 4 A_1 C_1 = B_2^2 - 4 A_2 C_2 = B_3^2 - 4 A_3 C_3$$

haben, und daß jede von ihnen durch eine entsprechende bilineare Substitution in das Produkt der beiden anderen Formen übergeht.

Das erstere folgt leicht aus einem bekannten Satze über partiale Determinanten. Bildet man aus zwei Reihen von je vier Größen

$$p,\ p',\ p'',\ p''',$$
$$q,\ q',\ q'',\ q'''$$

die sechs Determinanten

$$(4.)\quad \begin{cases} P=p\,q' - q\,p', & Q=p\,q''-q\,p'', & R=p\,q'''-q\,p''', \\ U=p''\,q'''-q''\,p''', & T=p'\,q'''-q'\,p''', & S=p'\,q''-q'\,p'', \end{cases}$$

so genügen die drei letzteren den beiden Gleichungen

$$Up'-Tp''+Sp'''=0,\quad Uq'-Tq''+Sq'''=0;$$

multipliziert man die erste mit $-q$, die zweite mit p und addiert, so erhält man den in Rede stehenden Satz

$$(5.)\qquad PU-QT+RS=0.$$

Wenden wir ihn auf das Beispiel

$$(6.)\quad \begin{cases} p=\beta_r, & p'=\alpha_s, & p''=\alpha_t, & p'''=\beta_0\,, \\ q=-\alpha_0, & q'=-\beta_t, & q''=-\beta_s, & q'''=-\alpha_r \end{cases}$$

an, so wird zufolge (2.):

$$(7.)\quad \begin{cases} P=-A_s, & Q=-A_t, & R=-\frac{1}{2}(B_t+B_s), \\ U=-C_s, & T=-C_t, & S=-\frac{1}{2}(B_t-B_s), \end{cases}$$

also

$$A_s\,C_s-A_t\,C_t+\frac{1}{4}(B_t+B_s)\,(B_t-B_s)=0$$

oder

$$B_s^2-4\,A_s\,C_s=B_t^2-4\,A_t\,C_t,$$

womit unsere Behauptung über die Diskriminanten der drei Formen bewiesen ist. Wir bemerken zugleich, daß diese gemeinsame Diskriminante D, die eine homogene Funktion vierten Grades von den acht Konstanten α, β ist, nicht identisch verschwindet; denn wenn man z. B. $\alpha_0=\beta_0=0$, alle anderen sechs Konstanten α, $\beta=1$ setzt, so werden alle neun Koeffizienten A_r, B_r, C_r gleich 1, also $D=-3$.

Um auch die zweite Behauptung zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$(8.)\quad \frac{\partial F_r}{\partial x_r}=2\,A_r\,x_r+B_r\,y_r=2\,u_r,\quad \frac{\partial F_r}{\partial y_r}=B_r\,x_r+2\,C_r\,y_r=2\,v_r,$$

woraus

$$(9.)\qquad u_r\,x_r+v_r\,y_r=F_r$$

folgt, und nehmen die Konstanten (6.) zu Koeffizienten der beiden bilinearen, in bezug auf s, t symmetrischen Funktionen

$$(10.)\qquad \begin{cases} X_r = \quad \beta_r x_s x_t + \alpha_s x_s y_t + \alpha_t y_s x_t + \beta_0 y_s y_t, \\ Y_r = -\alpha_0 x_s x_t - \beta_t x_s y_t - \beta_s y_s x_t - \alpha_r y_s y_t. \end{cases}$$

Eliminiert man der Reihe nach jedes der vier Produkte $x_s x_t$, $x_s y_t$, $y_s x_t$, $y_s y_t$, so erhält man mit Rücksicht auf (4.), (7.), (8.) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_0 X_r + \beta_r Y_r &= \quad -A_s x_s y_t - \quad A_t y_s x_t - \frac{1}{2}(B_t + B_s) y_s y_t = -y_s u_t - u_s y_t, \\
\beta_t X_r + \alpha_s Y_r &= \quad A_s x_s x_t - \frac{1}{2}(B_t - B_s) y_s x_t - \quad C_t y_s y_t = -y_s v_t + u_s x_t, \\
\beta_s X_r + \alpha_t Y_r &= \quad A_t x_s x_t + \frac{1}{2}(B_t - B_s) x_s y_t - \quad C_s y_s y_t = \quad x_s u_t - v_s y_t, \\
\alpha_r X_r + \beta_0 Y_r &= \frac{1}{2}(B_t + B_s) x_s x_t + \quad C_t x_s y_t + \quad C_s y_s x_t = \quad x_s v_t + v_s x_t,
\end{aligned}$$

die man mit Benutzung der bekannten Bezeichnung für die Multiplikation von zwei binären Substitutionen auch in der Form

$$\begin{pmatrix} \beta_s X_r + \alpha_t Y_r, & \alpha_r X_r + \beta_0 Y_r \\ \alpha_0 X_r + \beta_r Y_r, & \beta_t X_r + \alpha_s Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s, & v_s \\ -y_s, & u_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t, & v_t \\ -y_t, & x_t \end{pmatrix}$$

darstellen kann, und da bekanntlich die Determinante des Produktes von zwei Substitutionen das Produkt aus deren Determinanten ist, so ergibt sich aus der Definition (1.) der Formen $F_r = F_r(x_r, y_r)$ und aus (9.) das Resultat

$$(11.)\qquad F_r(X_r, Y_r) = F_s F_t,$$

womit auch unsere zweite Behauptung bewiesen ist.

Man erkennt übrigens leicht, daß dieser zweite Satz (11.) den ersten (3.) über die Diskriminanten in sich schließt. Sieht man nämlich x_s, y_s als Konstanten an, so nimmt die obige bilineare Substitution (10.) die Form einer einfachen binären Substitution

$$\begin{aligned}
X_r &= \quad (\beta_r x_s + \alpha_t y_s) x_t + (\alpha_s x_s + \beta_0 y_s) y_t, \\
Y_r &= -(\alpha_0 x_s + \beta_s y_s) x_t - (\beta_t x_s + \alpha_r y_s) y_t
\end{aligned}$$

an, deren Determinante zufolge (1.) gleich $-F_s$ ist, und durch diese Substitution geht die Form

$$F_r(X_r, Y_r) = A X_r^2 + B_r X_r Y_r + C_r Y_r^2$$

nach dem Satze (11.) in die Form

$$F_s F_t(x_t, y_t) = F_s A_t x_t^2 + F_s B_t x_t y_t + F_s C_t y_t^2$$

über. Nach dem bekannten *Fundamentalsatz* über die Transformation einer binären quadratischen Form durch eine einfache lineare Substitution ist aber die Diskriminante der neuen Form gleich der der alten, multipliziert mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante. Bezeichnet man nun mit D_1, D_2, D_3 die Diskriminanten der Formen F_1, F_2, F_3, so ist in unserem Falle die Diskriminante der neuen Form

$$(F_s B_t)^2 - 4(F_s A_t)(F_s C_t) = D_t F_s^2,$$

und da D_r die Diskriminante der alten Form, und $-F_s$ die Substitutionsdeterminante ist, so folgt $D_t F_s^2 = D_r(-F_s)^2$, also $D_t = D_r$, was zu beweisen war.

Die acht Konstanten α, β bilden daher immer die Koeffizienten von drei verwandten binären bilinearen Substitutionen, deren Zusammenhang wesentlich in der Identität

$$(12.) \qquad y_1 X_1 - x_1 Y_1 = y_2 X_2 - x_2 Y_2 = y_3 X_3 - x_3 Y_3$$

besteht, und erzeugen zugleich drei quadratische Formen, deren jede durch eine dieser Substitutionen in das Produkt der beiden anderen übergeht.

Indem wir uns vorbehalten, auf diese Identität später (in § 4) zurückzukommen, beschließen wir diese Betrachtungen mit einer Bemerkung, die sich auf den Fall bezieht, wo die bisher willkürlichen acht Konstanten α, β *ganze rationale Zahlen* sind. Dann sind auch die Koeffizienten der drei Formen F_1, F_2, F_3 und deren Diskriminante D ganze Zahlen; wir wollen annehmen, daß keine dieser Formen identisch verschwindet, und wollen mit M_r *den Teiler der Form* F_r, d. h. den positiven größten gemeinsamen Teiler ihrer Koeffizienten A_r, B_r, C_r bezeichnen. Bedeutet ferner K_r den größten gemeinsamen Teiler von M_s, M_t, also auch den der sechs Koeffizienten A_s, B_s, C_s, A_t, B_t, C_t, so folgt aus (3.) auch $B_s \equiv B_t \pmod{2K_r}$, mithin ist K_r auch gemeinsamer Teiler der sechs partialen Determinanten (7.) und zwar der *größte*, weil umgekehrt jeder gemeinsame Teiler dieser Determinanten offenbar auch in B_s, B_t, also in M_s, M_t, K_r aufgeht.

Entwickelt man nun beide Seiten der in bezug auf die vier Variabeln x_s, y_s, x_t, y_t identischen Gleichung (11.) durch Auflösung aller die Variabeln einschließenden Klammern, so leuchtet ein, daß alle Koeffizienten der linken

Seite durch M_r teilbar sind, während offenbar das Produkt $M_s M_t$ der größte gemeinsame Teiler der neun Koeffizienten der rechten Seite ist; mithin ist $M_s M_t$ *teilbar durch* M_r, also

$$(13.) \qquad M_2 M_3 = M_1 N_1, \quad M_3 M_1 = M_2 N_2, \quad M_1 M_2 = M_3 N_3,$$

wo N_1, N_2, N_3 ebenfalls natürliche Zahlen bedeuten; dann ist zugleich

$$(14.) \qquad M_1^2 = N_2 N_3, \quad M_2^2 = N_3 N_1, \quad M_3^2 = N_1 N_2,$$

und wenn z. B. M_2, M_3 *relative Primzahlen* sind, also $K_1 = 1$, so folgt

$$(15.) \qquad M_1 = M_2 M_3, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = M_3^2, \quad N_3 = M_2^2.$$

§ 2.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns zu der Aufgabe, welche *Gauß* im Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae behandelt hat. Ich will aber vorher bemerken, daß ich hier wie schon früher*) statt der von *Gauß* zugrunde gelegten Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$, deren zweiter Koeffizient den Faktor 2 enthält, immer Formen $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ betrachte, wo a, b, c *beliebige Konstanten* bedeuten, die nur der Beschränkung unterliegen sollen, daß die aus ihnen gebildete *Diskriminante* $\partial = b^2 - 4ac$ der Form $f = f(x, y)$ von Null verschieden ist.

Sind nun $f_1 = f_1(x_1, y_1)$, $f_2 = f_2(x_2, y_2)$, $f_3 = f_3(x_3, y_3)$ drei solche Formen mit den Diskriminanten ∂_1, ∂_2, ∂_3, so besteht die Untersuchung darin, alle Folgerungen aus der *Annahme* zu ziehen, daß die erste Form f_1 durch eine bilineare Substitution in das Produkt $f_2 f_3$ der beiden anderen Formen übergeht; bezeichnet man daher mit X_1, Y_1 zwei bilineare Funktionen der beiden Paare (x_2, y_2), (x_3, y_3), so wird diese Annahme durch die Identität

$$f_1(X_1, Y_1) = f_2 f_3$$

ausgedrückt; um aber die Symmetrie so viel wie möglich zu bewahren, fügen wir dem Produkte noch einen von Null verschiedenen konstanten Faktor k_1 hinzu und setzen also

$$(16.) \qquad f_1(X_1, Y_1) = k_1 f_2 f_3.$$

*) Zuerst in §§ 169, 170 der zweiten Auflage (1871) von *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie.

Aus den acht Koeffizienten α, β der bilinearen Funktionen, die wir (gemäß (10.) in § 1) in die Form

$$(17.) \qquad \begin{cases} X_1 = \beta_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_2 y_3 + \alpha_3 y_2 x_3 + \beta_0 y_2 y_3, \\ Y_1 = -\alpha_0 x_2 x_3 - \beta_3 x_2 y_3 - \beta_2 y_2 x_3 - \alpha_1 y_2 y_3 \end{cases}$$

setzen, bilden wir nach § 1 die drei Formen F_1, F_2, F_3; dann besteht das *Endresultat* der Untersuchung wesentlich darin, daß diese Formen sich beziehungsweise von den Formen f_1, f_2, f_3 nur um konstante, von Null verschiedene Faktoren n_1, n_2, n_3 unterscheiden, daß also identisch

$$(18.) \qquad F_1 = n_1 f_1, \; F_2 = n_2 f_2, \; F_3 = n_3 f_3$$

ist.

Um dies in aller Kürze zu beweisen, verfahre man ebenso wie bei dem *zweiten* Beweise des Diskriminantensatzes (3.) in § 1. Sieht man in den Gleichungen (17.) erst x_2, y_2, dann x_3, y_3 als Konstanten an, so nehmen sie die Gestalt von einfachen linearen Substitutionen an, deren Determinanten resp. $-F_2, -F_3$ sind, und der Fundamentalsatz über solche Transformationen einer Form f_1 ergibt zufolge der Annahme (16.) die beiden Gleichungen

$$\partial_1 (-F_2)^2 = \partial_3 (k_1 f_2)^2, \quad \partial_1 (-F_3)^2 = \partial_2 (k_1 f_3)^2,$$

und da $k_1, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ nach unserer Annahme von Null verschieden sind, so folgen hieraus die beiden letzten Gleichungen (18.), wo n_2, n_3 von Null verschiedene Konstanten bedeuten. Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so geht die Annahme (16.) mit Rücksicht auf den Satz (11.) in § 1 in die Gleichung

$$k_1 F_1(X_1, Y_1) = n_2 n_3 f_1(X_1, Y_1)$$

über, welche identisch in bezug auf die vier Variabeln x_2, y_2, x_3, y_3 bestehen muß. Da nun ∂_2 nicht Null ist, also auch die Form f_2 nicht identisch verschwindet, so gilt dasselbe auch von der Form $F_2 = n_2 f_2$; man kann daher den Variabeln x_2, y_2 in (17.) solche Werte beilegen, daß F_2 einen von Null verschiedenen Wert erhält, und folglich kann man hierauf x_3, y_3 immer so wählen, daß X_1, Y_1 beliebig vorgeschriebene Werte x_1, y_1 annehmen; man darf daher in der vorstehenden Gleichung X_1, Y_1 durch die unabhängigen Variabeln x_1, y_1 ersetzen, und folglich gilt auch die erste der Identitäten (18.), was zu beweisen war.

Umgekehrt, wenn zwischen drei Formen f_1, f_2, f_3 und den in § 1 definierten Formen F_1, F_2, F_3 die drei Identitäten (18.) bestehen, wo n_1, n_2, n_3 von Null verschiedene Konstanten bedeuten, so folgen aus dem Satze (11.) in § 1 die drei Identitäten

$$f_r(X_r, Y_r) = k_r f_s f_t, \tag{19.}$$

wo

$$k_r = \frac{n_s n_t}{n_r}, \tag{20.}$$

d. h. jede der drei Formen f_1, f_2, f_3 geht durch eine bilineare Substitution in das mit einer Konstanten multiplizierte Produkt der beiden anderen Formen über.

Die drei Gleichungen (18.), aus denen unmittelbar die Relationen

$$D = \partial_1 n_1^2 = \partial_2 n_2^2 = \partial_3 n_3^2 \tag{21.}$$

zwischen den Diskriminanten der sechs Formen F_r, f_r folgen, schließen diejenigen neun Gleichungen in sich, welche *Gauß* in der Schlußbemerkung des Art. 235 mit Ω bezeichnet, und die als Grundlage für die in den Artikeln 236—241 folgenden Untersuchungen dienen. Die Gleichungen (18.), bei deren Ableitung wir gar keine Voraussetzung über die besondere Natur der Koeffizienten der Formen f_1, f_2, f_3 und der bilinearen Funktionen X_1, Y_1 gemacht haben, enthalten den *algebraischen* Teil der Untersuchung; wir wollen jetzt annehmen, alle diese Koeffizienten seien *ganze rationale Zahlen*, und wollen die *zahlentheoretischen* Folgerungen aus der Annahme (16.) ziehen, die bei *Gauß* schon im Laufe seiner Untersuchung auftreten.

Aus (18.) folgt zunächst, daß n_1, n_2, n_3 ganze oder gebrochene *rationale* Zahlen sind, mithin haben zufolge (21.) die Diskriminanten $D, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ *dasselbe Vorzeichen, und sie verhalten sich wie Quadrate von ganzen Zahlen* (Conclusio prima bei *Gauß*). Bezeichnen wir ferner mit m_r den Teiler der Form f_r und (wie in § 1) mit M_r den der Form F_r, so ist zufolge (18.)

$$M_1 = \varepsilon_1 m_1 n_1, \quad M_2 = \varepsilon_2 m_2 n_2, \quad M_3 = \varepsilon_3 m_3 n_3, \tag{22.}$$

wo

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1, \tag{23.}$$

also $\varepsilon_1 n_1, \varepsilon_2 n_2, \varepsilon_3 n_3$ positiv sind.

Jetzt kehren wir, indem wir die Symmetrie aufgeben, zu der eigentlichen Annahme von *Gauß* zurück, daß nämlich f_1 durch die bilineare Sub-

stitution (17.) in das Produkt $f_2 f_3$ selbst übergeht, daß also

$$f_1(X_1,\ Y_1) = f_2 f_3, \tag{24.}$$

mithin

$$k_1 = 1,\ n_1 = n_2 n_3,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \tag{25.}$$

ist, woraus nach (21.), (22.) auch

$$\partial_2 = \partial_1 n_3^2,\ \partial_3 = \partial_1 n_2^2, \tag{26.}$$

$$\partial_2 m_3^2 = \partial_1 M_3^2,\ \partial_3 m_2^2 = \partial_1 M_2^2 \tag{27.}$$

folgt. Bedeutet daher K_1 wieder den größten gemeinsamen Teiler von M_2, M_3 (wie in § 1), so ist $\partial_1 K_1^2$ *der größte gemeinsame Teiler der beiden Produkte* $\partial_2 m_3^2$, $\partial_3 m_2^2$ (Conclusio secunda et quarta bei *Gauß*).

Nach der Definition von *Gauß* heißt nun die Form f_1 *zusammengesetzt* (*composita*) *aus den beiden Formen* f_2, f_3, wenn $K_1 = 1$ ist, also M_2, M_3 *relative Primzahlen* sind. Beschränken wir uns jetzt auf diesen Fall, so folgt aus (27.), daß *die Diskriminante* ∂_1 *der aus* f_2, f_3 *zusammengesetzten Form* f_1 *der größte gemeinsame Teiler von* $\partial_2 m_3^2$, $\partial_3 m_2^2$ ist. Da ferner nach (15.) in § 1 aus der jetzigen Annahme auch $M_1 = M_2 M_3$ folgt, so ergibt sich aus (22.), (25.) auch $m_1 = m_2 m_3$, d. h. *der Teiler* m_1 *der zusammengesetzten Form* f_1 *ist das Produkt aus den Teilern* m_2, m_3 *der Formen* f_2, f_3 (Conclusio quinta bei *Gauß*).

Hiermit ist der wesentliche Inhalt des Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae erschöpft. Die daselbst zum Ziele führenden Rechnungen, die zum großen Teil nur angedeutet sind, und deren wirkliche Ausführung dem Leser überlassen ist, glaube ich in der hier vorliegenden Darstellung erheblich vereinfacht zu haben. Da diese Vereinfachung hauptsächlich auf der in § 1 vorausgeschickten Einführung der mit einer jeden bilinearen Substitution verbundenen drei Formen F_1, F_2, F_3 und auf deren symmetrischer Behandlung beruht, welche mit geringer Rechnung zu dem Hauptsatze (11.) führt, so war es eben wegen dieser Symmetrie nicht möglich, die Bezeichnungen von *Gauß* beizubehalten. Zur Erleichterung einer Vergleichung bemerke ich folgendes. *Gauß* untersucht die Transformation einer Form F in das Produkt von zwei Formen f, f', deren Variable entsprechend bezeichnet sind, durch die bilineare Substitution

$$X = pxx' + p'xy' + p''yx' + p'''yy',$$
$$Y = qxx' + q'xy' + q''yx' + q'''yy'$$

und gebraucht die Zeichen P, Q, R, S, T, U in derselben Bedeutung wie in Gleichung (4.). Um daher von dieser Bezeichnung zu der meinigen in (24.) überzugehen, hat man F, f, f' resp. durch f_1, f_2, f_3 zu ersetzen, und die vorstehende bilineare Substitution geht in (17.) über, wenn die Koeffizienten $p, p' \ldots q'''$ wie in (6.) ausgedrückt werden, wobei die Indizes r, s, t resp. durch 1, 2, 3 zu ersetzen sind. Beachtet man nun die Vorzeichen der hieraus entspringenden Ausdrücke (7.), so erkennt man, daß man die in den neun Schlußgleichungen Ω bei *Gauß* auftretenden beiden Zahlen n, n' resp. durch $-n_3, -n_2$ zu ersetzen hat, um diese Gleichungen Ω in Übereinstimmung mit unseren Gleichungen (18.) zu bringen, in denen zufolge (25.) $n_1 = n_2 n_3$ ist. Dies ist deshalb erwähnenswert, weil *Gauß* auf die Vorzeichen der Zahlen n, n' eine wichtige Unterscheidung hinsichtlich der *Art* gründet, wie die Formen f, f' in die Transformation oder Komposition $F = ff'$ eintreten, worauf wir hier aber nicht näher eingehen können.

§ 3.

Der Satz (11.) in § 1, auf welchem alles andere beruht, ist dort wohl auf dem kürzesten Wege hergeleitet, nämlich durch unmittelbare Rechnung mit den acht Konstanten α, β, aus denen die Koeffizienten der sechs bilinearen Funktionen (10.) und die der drei quadratischen Formen (1.) gebildet sind. Man kann aber zu demselben Resultate und zu einem tieferen Einblick in den Gegenstand der Untersuchung auf einem ganz anderen Wege gelangen, wobei diese Konstanten α, β gar nicht explizite in die Rechnung eintreten, sondern die in (12.) angeführte binäre trilineare Form als alleiniger Ausgangspunkt der Untersuchung dient. Der Weg, den ich hierbei einschlage, beruht auf der freiesten Ausnutzung der totalen Differentiation in der Auffassung, wie ich sie mir seit vielen Jahren gebildet und gelegentlich auch befreundeten Mathematikern mitgeteilt habe.*) Da dieselbe nicht nur in der reinen Analysis, sondern auch in der Geometrie, Mechanik, in der mathematischen Physik nützlich verwendet werden kann und noch nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, wie sie es wohl verdient, so will

*) Vergl. § 159 der zweiten Auflage (1871) von *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie und meinen Aufsatz: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen (Göttinger Nachrichten 1885), wo von dieser Auffassung Gebrauch gemacht ist.

ich wenigstens das, was für unseren Zweck erforderlich ist, zunächst besprechen.

Ich betrachte einen analytischen Raum, in welchem jeder Punkt durch die Werte von n unabhängigen Variabeln (Koordinaten) $x_1, x_2, \dots x_n$ bestimmt ist, und bezeichne mit Φ den Inbegriff aller derjenigen Funktionen φ dieser Variabeln, welche partielle Derivierte von beliebig hoher Ordnung besitzen und zugleich der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) \tag{28.}$$

genügen. Dann soll das Zeichen d eine *Operation* bedeuten, welche aus jeder solchen Funktion φ eine entsprechende, ebenfalls in Φ enthaltene Funktion $d\varphi$ in der Weise erzeugt, daß. das bekannte *Grundgesetz* der totalen Differentiation erfüllt wird, d. h. jede zwischen m solchen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$ bestehende Identität

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m) = 0 \tag{29.}$$

soll die Identität

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_m} d\varphi_m = 0 \tag{30.}$$

zur Folge haben.

Daß solche Operationen d überhaupt möglich sind, geht aus der gewöhnlichen Auffassung der Differentiale als unendlich kleiner Änderungen der Variablen hervor; wir müssen aber jetzt feststellen, in welchem Umfange solche Operationen d in der obigen allgemeinsten Auffassung existieren, und wodurch sie vollständig bestimmt werden. Die letztere Frage läßt sich sofort beantworten; denn wenn φ irgend eine in dem System Φ enthaltene Funktion ist, so besteht zwischen ihr und den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ eine Identität, die wir in der Form

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{31.}$$

darstellen dürfen, und hieraus soll nach der obigen Definition der Operation d die Identität

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = \sum^{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} dx_r \tag{32.}$$

folgen; mithin ist die Operation d vollständig bestimmt, sobald in jedem

Punkte unseres Raumes die Werte der n Funktionen

$$(33.) \qquad dx_1, dx_2, \ldots dx_n$$

gegeben sind. Umgekehrt, hat man diese n Funktionen *willkürlich* aus Φ gewählt, und bildet man daraus nach (32.) für jede Funktion φ eine zugehörige Funktion $d\varphi$ (welche für $\varphi = x_r$ offenbar mit der gewählten Funktion dx_r übereinstimmt), so ist leicht zu zeigen, daß die hierdurch bestimmte Operation d wirklich der obigen Grundforderung genügt. Denn durch partielle Derivation in bezug auf die Variable x_r ergibt sich aus der oben angenommenen Identität (29.) bekanntlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_r} = 0;$$

multipliziert man mit dx_r und summiert, indem man r die Indizes $1, 2, \ldots n$ durchlaufen läßt, so ergibt sich mit Rücksicht auf (32.) die zu beweisende Gleichung (30.).

Aus dem in (29.), (30.) ausgedrückten Grundgesetz einer solchen Operation d leuchtet auch unmittelbar ihre *Invarianz* ein, d. h. sie bleibt dieselbe, wenn statt der Koordinaten x ein anderes System von n von einander unabhängigen Funktionen y zur Ortsbestimmung gewählt wird, wobei die ihnen entsprechenden Funktionen dy gemäß (32.) aus den Funktionen dx zu bestimmen sind. Auch versteht sich von selbst, daß zufolge desselben Gesetzes alle Regeln der gewöhnlichen Differentiation, wie

$$d(\varphi_1 \pm \varphi_2) = d\varphi_1 \pm d\varphi_2, \quad d(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2 d\varphi_1 + \varphi_1 d\varphi_2$$

ihre volle Geltung behalten.

Unter den vielen verschiedenen Namen, welche man je nach der Beschaffenheit des Anwendungsgebietes einer solchen Operation d beilegen möchte,*) will ich hier den in einem solchen Gebiete eingebürgerten, freilich in viel speziellerer Bedeutung gebrauchten Namen *Vektor* wählen, während die durch d erzeugten Funktionen $d\varphi$ unbedenklich Differentiale genannt werden können. Die partielle Derivation $\frac{\partial}{\partial x_r}$ in bezug auf die Variable x_r

*) Immer von einer Differentiation erster Ordnung oder Variation erster Ordnung zu sprechen, ist zu unbequem. *Sophus Lie* gebraucht für seine Symbole $X(f)$, die mit den Vektoren identisch sind, den Namen *infinitesimale Transformation* (Theorie der Transformationsgruppen; Abschnitt 1, Kapitel 3, § 13, S. 54).

ist offenbar der spezielle Vektor d, für welchen die Differentiale (33.) mit Ausnahme von dx_r, welches $=1$ ist, identisch verschwinden. Es ist auch zweckmäßig, den Vektor *Null* einzuführen, und durch $d=0$ anzudeuten, daß *alle* n Funktionen (33.), also auch alle $d\varphi$ identisch verschwinden; eine Verwirrung ist hierbei nicht zu befürchten, weil aus dem Zusammenhang sich immer ergeben wird, ob von der Zahl oder dem Vektor Null die Rede ist.

Da ein Vektor d aus jedem Element φ des Systems Φ ein ebenfalls in Φ enthaltenes Element $d\varphi$ erzeugt, so fällt diese Operation unter den viel allgemeineren Begriff einer *Abbildung des Systems Φ in sich selbst.* Solche Abbildungen, die im folgenden ausschließlich durch Buchstaben e (mit Akzenten oder Indizes) bezeichnet werden sollen, gestatten sehr mannigfaltige Verbindungen und symbolische Rechnungen, die ich jetzt erkläre, um sie später auf unsere Vektoren anzuwenden. Eine Abbildung e von Φ in in sich selbst erzeugt aus jedem Element φ des Systems Φ ein mit $e\varphi$ zu bezeichnendes Bild, welches wieder eine in Φ enthaltene Funktion ist, und die Abbildungen e, e' gelten stets und nur dann für eine und dieselbe — was durch $e=e'$ ausgedrückt wird —, wenn für *jede* Funktion φ die Identität $e\varphi=e'\varphi$ besteht. Aus je zwei Abbildungen e_1, e_2 entspringt eine als Produkt e_1e_2 zu bezeichnende Abbildung, welche durch die für jede Funktion φ geltende Identität $(e_1e_2)\varphi=e_1(e_2\varphi)=e_1e_2\varphi$ erklärt wird und von dem Produkte e_2e_1 wohl zu unterscheiden ist; ersetzt man aber in dieser Definition die willkürliche Funktion φ durch $e_3\varphi$, wo e_3 eine beliebige Abbildung bedeutet, so ergibt sich unmittelbar die Geltung des Assoziationsgesetzes

$$(e_1e_2)e_3=e_1(e_2e_3)=e_1e_2e_3,$$

und hieraus folgt in bekannter Weise die bestimmte Bedeutung eines aus m Abbildungen in vorgeschriebener Folge gebildeten Produktes $e_1e_2\dots e_m$. Zwei Abbildungen e_1, e_2 heißen *permutabel*, wenn $e_1e_2=e_2e_1$ ist.

Ebenso sollen Summe und Differenz $(e_1\pm e_2)$ und, wenn λ eine Funktion in Φ ist, das Produkt λe durch

$$(e_1\pm e_2)\varphi=e_1\varphi\pm e_2\varphi \quad \text{und} \quad (\lambda e)\varphi=\lambda(e\varphi)=\lambda e\varphi$$

erklärt werden, und eine symbolische Gleichung von der Form

$$e=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_me_m=\sum_i\lambda_ie_i, \tag{34.}$$

wo die λ_i Funktionen in Φ sind, soll bedeuten, daß für *jede* Funktion φ

die Identität

$$(35.) \qquad e\varphi = \overset{\iota}{\Sigma} \lambda_\iota e_\iota \varphi$$

besteht. Ersetzt man φ durch $e'\varphi$, wo e' eine beliebige Abbildung bedeutet, so ergibt sich, daß die symbolische Gleichung

$$(36.) \qquad \lambda e e' = \overset{\iota}{\Sigma} \lambda \lambda_\iota e_\iota e',$$

wo λ eine Funktion bedeutet, eine notwendige Folge der Gleichung (34.) ist, d. h. man darf eine solche Gleichung gliedweise von links mit einer Funktion λ, von rechts mit einer Funktion φ oder einer Abbildung e' multiplizieren; ebenso darf man solche Gleichungen addieren und subtrahieren, wie wenn die Abbildungen e Größen wären. Da ferner ein *Vektor* d alle Regeln der gewöhnlichen Differentiation befolgt, so ergibt sich aus (35.) ebenso, daß auch die symbolische Gleichung

$$(37.) \qquad de = \overset{\iota}{\Sigma} \lambda_\iota de_\iota + \overset{\iota}{\Sigma} d\lambda_\iota e_\iota$$

eine Folge von (34.) ist.

Wir betrachten im folgenden nur solche Abbildungen e, welche entweder selbst Vektoren oder Produkte von mehreren Vektoren sind. Hat man ein System von m Vektoren $d_1, d_2, \ldots d_m$ und ebenso vielen Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, so ergibt sich aus der Gleichung (32.), wenn man sie für jeden Vektor d_ι in Anspruch nimmt und von links mit λ_ι multipliziert, daß jede Abbildung von der Form

$$(38.) \qquad d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \cdots + \lambda_m d_m = \overset{\iota}{\Sigma} \lambda_\iota d_\iota$$

wieder ein *Vektor* ist; einen solchen Vektor d nennen wir *abhängig* von den m Vektoren d_ι, und ebenso sagen wir, daß diese m Vektoren d_ι *von einander abhängig* seien oder ein *reduzibles System* bilden, falls es m Funktionen λ_ι gibt, die nicht alle identisch verschwinden, und für welche der vorstehende Vektor $d=0$ wird. Offenbar tritt dieser Fall immer ein, wenn $m > n$ ist; ist aber $m \leqq n$, so wird er dadurch charakterisiert, daß alle Determinanten m-ten Grades, die man aus den m Zeilen und aus m Spalten des Systems

$$\begin{array}{l} d_1 x_1,\ d_1 x_2,\ \ldots\ d_1 x_n \\ d_2 x_1,\ d_2 x_2,\ \ldots\ d_2 x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_m x_1,\ d_m x_2,\ \ldots\ d_m x_n \end{array}$$

bilden kann, identisch verschwinden. Wir sagen ferner, die m Vektoren d_ι in (38.) seien *von einander unabhängig* oder sie bilden ein *irreduzibles System*, wenn die Forderung $d=0$ nur durch das identische Verschwinden aller m Funktionen λ_ι erfüllt wird. Bilden n Vektoren $d_1, d_2, \ldots d_n$ ein solches irreduzibles System, so läßt sich *jeder* Vektor d in der Form

$$(39.) \qquad d=\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2+\ldots+\lambda_n d_n=\sum^r \lambda_r d_r$$

darstellen, wo die r Funktionen λ_r durch d vollständig bestimmt sind. Ein solches System bilden offenbar die n partiellen Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_r}$, und die vorstehende Gleichung geht dann in

$$d=\sum^r dx_r \frac{\partial}{\partial x_r}$$

über, die mit (32.) übereinstimmt.

Wir wollen jetzt zwei beliebige Vektoren d_1, d_2 betrachten und die daraus entspringenden Produkte $d_1 d_2$ und $d_2 d_1$ mit einander vergleichen. Zufolge (32.) ist

$$d_2\varphi=\sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_2 x_r, \qquad d_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}=\sum^s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_1 x_s,$$

wo r, s die Indizes $1, 2, \ldots n$ durchlaufen, und da jeder Vektor die Regeln der totalen Differentiation befolgt, so wird

$$d_1 d_2 \varphi=\sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_1 d_2 x_r+\sum^{r,s} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_1 x_s d_2 x_r$$

und ebenso durch Vertauschung von d_1, d_2

$$d_2 d_1 \varphi=\sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_2 d_1 x_r+\sum^{r,s} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_2 x_s d_1 x_r;$$

vertauscht man in der letzten Doppelsumme die beiden von einander unabhängigen Summationsbuchstaben r, s mit einander, so ergibt sich aus der Annahme (28.) ihre Identität mit der Doppelsumme, welche in der Darstellung von $d_1 d_2 \varphi$ auftritt; durch Subtraktion erhält man daher die Gleichung

$$(d_1 d_2-d_2 d_1)\varphi=\sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}(d_1 d_2-d_2 d_1) x_r,$$

in welcher nur die Derivierten *erster* Ordnung der willkürlichen Funktion φ auftreten. Definiert man daher eine neue Operation oder Abbildung (d_1, d_2) durch

$$(40.) \qquad (d_1, d_2)=d_1 d_2-d_2 d_1=-(d_2, d_1),$$

so wird

$$(41.) \qquad (d_1, d_2)\varphi = \sum^{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}(d_1, d_2)x_r,$$

und durch Vergleichung mit (32.) ergibt sich der wichtige Satz, daß diese Abbildung (d_1, d_2) wieder ein *Vektor* ist. Dieser Satz ist meines Wissens zuerst von *Jacobi* gefunden (in § 23 der nachgelassenen Abhandlung Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi, dieses Journal Bd. 60) und bildet eine wesentliche Grundlage seiner Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen. Ich bemerke ausdrücklich, daß die von ihm mit A, B bezeichneten Operationen vollständig identisch mit unseren Vektoren sind; daß aber diese Operationen nicht nur die Gesetze der totalen Differentiation befolgen, sondern daß gerade in dieser, alles andere einschließenden Eigenschaft ihr ganzes Wesen besteht, scheint nirgends deutlich erkannt und in aller Schärfe ausgesprochen zu sein.

Daß zwei Vektoren d_1, d_2 *permutabel* sind, daß also $d_1 d_2 = d_2 d_1$ ist, wird jetzt durch $(d_1, d_2) = 0$ ausgedrückt. Wir betrachten nun drei beliebige Vektoren d_1, d_2, d_3 und bilden daraus die Abbildung

$$(42.) \qquad (d_1; d_2, d_3) = d_1(d_2, d_3) - (d_2, d_3)d_1 = -(d_1; d_3, d_2),$$

welche zufolge des eben erhaltenen Fundamentalsatzes ebenfalls ein *Vektor* ist; verfährt man nach den bei (34.), (36.), (37.) angegebenen Regeln, so so erhält man

$$(d_1; d_2, d_3) = (d_1 d_2 d_3 + d_3 d_2 d_1) - (d_2 d_3 d_1 + d_1 d_3 d_2),$$

und hieraus ergibt sich durch zyklische Vertauschung und Addition der Satz*)

$$(43.) \qquad (d_1; d_2, d_3) + (d_2; d_3, d_1) + (d_3; d_1, d_2) = 0.$$

Wenden wir dieselben Regeln auf die Gleichung (38.) an, die wir wieder in der Form

$$(44.) \qquad d = \sum^{\iota} \lambda_\iota d_\iota$$

darstellen, und bezeichnen wir mit d' einen beliebigen Vektor, so erhalten wir

$$dd' = \sum^{\iota} \lambda_\iota d_\iota d', \quad d'd = \sum \lambda_\iota d' d_\iota + \sum d' \lambda_\iota d_\iota;$$

*) Derselbe Satz findet sich in dem angeführten Werke von *Lie* (Abschnitt 1, Kapitel 5, § 26).

subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten und wendet die Symbolik (40.) an, so ergibt sich die Vektorgleichung

$$(45.) \qquad (d', d) = \overset{\iota}{\Sigma} \lambda_\iota (d', d_\iota) + \overset{\iota}{\Sigma} d' \lambda_\iota d_\iota$$

als eine notwendige Folge von (44.).

Bezeichnet man die aus einem Vektor d durch Wiederholung entspringenden Abbildungen $dd, ddd \ldots$ resp. mit $d^2, d^3 \ldots$, so gelten auch für diese Operationen die gewöhnlichen Regeln der Differentiation, z. B.

$$d^2\varphi = \overset{r}{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d^2 x_r + \overset{r,s}{\Sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} dx_r dx_s .$$

Genügen die n Differentiale dx_r den partiellen Differentialgleichungen $d^2 x_r = 0$ (was z. B. immer dann eintritt, wenn sie *konstant* sind), so folgt

$$d^2\varphi = \overset{r,s}{\Sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} dx_r dx_s ,$$

und wenn man für φ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades $F = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wählt, so wird

$$(46.) \qquad d^2 F = 2 F(dx_1, dx_2, \ldots dx_n).$$

Im Falle $n = 2$ wollen wir mit x, y die unabhängigen Variabeln und mit d einen Vektor bezeichnen, der den Bedingungen $d^2 x = d^2 y = 0$ genügt. Betrachten wir nun eine binäre quadratische Form

$$(47.) \qquad F = F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

und setzen deren Diskriminante

$$(48.) \qquad B^2 - 4AC = D,$$

so wird

$$(49.) \qquad \begin{cases} dF = (2Ax + By)dx + (Bx + 2Cy)dy \\ \qquad\quad = x(2Adx + Bdy) + y(Bdx + 2Cdy) \end{cases}$$

und

$$(50.) \qquad \frac{1}{2} d^2 F = Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = F(dx, dy).$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn man die Multiplikation der binären Substitutionen benutzt, auch in der Form

$$(51.) \qquad \begin{pmatrix} 2F, & dF \\ dF, & d^2F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, & y \\ dx, & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2A, & B \\ B, & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, & dx \\ y, & dy \end{pmatrix}$$

darstellen, und aus dem Satze über die Determinante eines Produktes von Substitutionen ergibt sich

$$(52.) \qquad dF^2 - 2Fd^2F = D(xdy - ydx)^2.$$

Es braucht aber kaum gesagt zu werden, daß dies nichts anderes ist als der bekannte, auch in § 1 benutzte Fundamentalsatz für die Transformation einer binären quadratischen Form F von der Diskriminante D durch eine binäre Substitution $\binom{x,\ dx}{y,\ dy}$, und daß der vorstehende Beweis ganz unabhängig von der hier vorgetragenen Theorie der Vektoren ist; der Satz sollte nur im Anschluß an diese Theorie in einer solchen Form dargestellt werden, wie wir ihn demnächst gebrauchen werden.

§ 4.

Wir kehren jetzt zu der in § 1 geführten Untersuchung zurück, um sie in anderer Form zu wiederholen und fortzusetzen. Wir betrachten, wie dort, drei Paare von unabhängigen Variabeln (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), die wir kurz die Paare z_1, z_2, z_3 nennen, und wollen in diesem sechsfach ausgedehnten analytischen Raume die Eigenschaften einer *binären trilinearen Form* H untersuchen, d. h. einer ganzen Funktion, welche in bezug auf jedes der drei Paare homogen vom ersten Grade ist. Hieraus folgt zunächst

$$(53.) \qquad H = x_1\frac{\partial H}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial H}{\partial y_1} = x_2\frac{\partial H}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial H}{\partial y_2} = x_3\frac{\partial H}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial H}{\partial y_3}.$$

Bezeichnen wir (wie in § 1) mit r, s, t irgend eine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3, so können wir drei *Vektoren* d_1, d_2, d_3 durch die gemeinsame Definition

$$(54.) \qquad d_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial H}{\partial x_r}$$

einführen, wo φ, wie immer im folgenden, jede willkürliche Funktion der sechs Variabeln bedeuten soll. Zufolge (32.) ist daher

$$(55.) \qquad d_r x_r = \frac{\partial H}{\partial y_r}, \quad d_r y_r = -\frac{\partial H}{\partial x_r}$$

und

$$(56.) \qquad d_r x_s = d_r y_s = d_r x_t = d_r y_t = 0;$$

für den Vektor d_r verhalten sich daher die Paare z_s, z_t wie Konstanten,

während $d_r x_r$, $d_r y_r$ bilineare Funktionen dieser beiden Paare, also konstant in bezug auf das Paar z_r sind. Ist daher φ homogen in bezug auf jedes einzelne Paar und zwar vom Grade m_r in bezug auf z_r, so ist $d_r \varphi$ homogen von den Graden $m_r - 1$, $m_s + 1$, $m_t + 1$ in bezug auf die Paare z_r, z_s, z_t. Aus (54.) folgt zunächst

$$d_r H = 0, \tag{57.}$$

und zufolge (55.) nehmen die Gleichungen (53.) die Form

$$H = y_s d_s x_s - x_s d_s y_s \tag{58.}$$

an.

Um nun den in (40.) erklärten Vektor $(d_r, d_s) = -(d_s, d_r)$ zu bilden, entwickeln wir die Gleichung (57.), indem wir die Operation d_r an dem Ausdruck (58.) mit Rücksicht auf (56.) vollziehen, woraus $y_s d_r d_s x_s = x_s d_r d_s y_s$ folgt; setzt man diese durch x_s und y_s, also auch durch $x_s y_s$ teilbare ganze Funktion $= x_s y_s F_{r,s}$, so wird

$$d_r d_s x_s = x_s F_{r,s}, \quad d_r d_s y_s = y_s F_{r,s}. \tag{59.}$$

Da nun $d_s x_s$, $d_s y_s$ bilineare Funktionen von z_r, z_t, also $d_r d_s x_s$ und $d_r d_s y_s$ homogen vom ersten Grade in bezug auf z_s, vom zweiten Grade in bezug auf z_t und frei von z_r sind, so ist $F_{r,s}$ *eine binäre quadratische Form des Paares* z_t mit konstanten Koeffizienten. Zufolge (56.) ist nun

$$d_s d_r x_s = d_s d_r y_s = 0,$$

mithin können wir die Gleichungen (59.) durch

$$(d_r, d_s) x_s = x_s F_{r,s}, \quad (d_r, d_s) y_s = y_s F_{r,s}$$

ersetzen; vertauscht man r mit s, wodurch (d_r, d_s) in $(d_s, d_r) = -(d_r, d_s)$ übergeht, so folgt hieraus

$$(d_r, d_s) x_r = -x_r F_{s,r}, \quad (d_r, d_s) y_r = -y_r F_{s,r},$$

wo $F_{s,r}$ ebenfalls eine quadratische Form des Paares z_t bedeutet. Da ferner die Variabeln x_t, y_t sich für beide Vektoren d_r, d_s wie Konstanten verhalten, so ist $(d_r, d_s) x_t = 0$, $(d_r, d_s) y_t = 0$.

Hiermit ist der Vektor (d_r, d_s) vollständig bestimmt, und zufolge (32.) wird

$$(d_r, d_s) \varphi = F_{r,s}\left(x_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + y_s \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}\right) - F_{s,r}\left(x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + y_r \frac{\partial \varphi}{\partial y_r}\right). \tag{60.}$$

Dies Resultat gibt Veranlassung, drei neue, von der Form H ganz unabhängige *Vektoren* e_1, e_2, e_3 durch die gemeinsame Erklärung

$$(61.) \qquad e_r \varphi = x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + y_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}$$

einzuführen, woraus

$$(62.) \qquad e_r x_r = x_r, \quad e_r y_r = y_r$$

und

$$(63.) \qquad e_r x_s = e_r y_s = e_r x_t = e_r y_t = 0$$

folgt. Daß eine Funktion φ *homogen* in bezug auf das Paar z_r und zwar vom Grade m_r ist, wird jetzt durch $e_r \varphi = m_r \varphi$ ausgedrückt; die Gleichungen (53.) lauten daher

$$(64.) \qquad e_r H = H,$$

und die Gleichung (60.) geht über in

$$(d_r, d_s)\varphi = F_{r,s} e_s \varphi - F_{s,r} e_r \varphi.$$

Setzt man nun $\varphi = H$ und bedenkt, daß zufolge (57.) auch $(d_r, d_s) H = 0$ ist, so erhält man $(F_{r,s} - F_{s,r}) H = 0$, und da wir annehmen, daß die Form H nicht identisch verschwindet, so ergibt sich $F_{r,s} = F_{s\,r}$ (was übrigens auch in dem ausgeschlossenen Fall $H = 0$ gelten würde, weil zufolge (55.), (59.) dann beide Formen $F_{r,s}$, $F_{s,r}$ identisch verschwinden); wir dürfen daher diese quadratische Form des Paares z_t einfacher durch $F_t = F_t(x_t, y_t)$ bezeichnen, und zugleich nimmt die vorhergehende Gleichung die Form

$$(65.) \qquad (d_r, d_s)\varphi = F_t (e_s \varphi - e_r \varphi)$$

an, welche nach (34.) symbolisch auch durch

$$(66.) \qquad (d_r, d_s) = F_t (e_s - e_r)$$

ausgedrückt werden kann, und die Gleichungen (59.) lauten jetzt

$$(67.) \qquad d_r d_s x_s = x_s F_t, \quad d_r d_s y_s = y_s F_t.$$

Daß übrigens die durch die erste Gleichung (59.) vollständig definierte Größe $F_{r,s}$, symmetrisch in bezug auf r, s ist, hätte man schon dort leicht zeigen können; denn setzt man in (54.) die willkürliche Funktion

$$\varphi = d_s x_s = \frac{\partial H}{\partial y_s},$$

so erhält man

$$x_s F_{r,s} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial y_s}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial y_s}\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

und da die hier auftretenden Derivierten zweiter Ordnung ebenso wie $F_{r,s}$ nur noch die beiden Variabeln x_t, y_t enthalten, so ergibt sich die genannte Symmetrie durch partielle Derivation nach x_s, und wir erhalten für die Form $F_{r,s} = F_{s,r} = F_t$ den Ausdruck

$$F_t = \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial y_s}\frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial y_s}\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}. \tag{68.}$$

Um jetzt den Zusammenhang der gegenwärtigen Untersuchung mit der in § 1 deutlich zu machen, bemerke ich Folgendes. Identifiziert man die Form H mit der dort in (12.) dargestellten Funktion, so sind die Konstanten α_0, β_0, α_r, β_r resp. die Koeffizienten von $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $x_ry_sy_t$, $y_rx_sx_t$; die in (55.) erklärten Größen d_rx_r, d_ry_r sind identisch mit den Funktionen X_r, Y_r in (10.), und der vorstehende Ausdruck für F_t stimmt vollständig mit der dortigen Definition (1.) der drei Formen F_1, F_2, F_3 überein. —

Den Satz (65.) wenden wir jetzt auf zwei Beispiele an. Setzt man zuerst $\varphi = F_s$, so folgt

$$d_r d_s F_s = 2 F_s F_t, \tag{69.}$$

weil $d_rF_s = 0$, $e_sF_s = 2F_s$, $e_rF_s = 0$ ist. Setzt man zweitens $\varphi = d_tx_t$ und bedenkt, daß diese Funktion bilinear in bezug auf die beiden Paare z_r, z_s, daß also

$$e_s d_t x_t = e_r d_t x_t = d_t x_t \tag{70.}$$

ist, so erhält man $d_rd_sd_tx_t = d_sd_rd_tx_t$; zufolge (67.) ist aber $d_sd_tx_t = x_tF_r$ und $d_rd_tx_t = x_tF_s$, mithin wird $d_r(x_tF_r) = d_s(x_tF_s)$, und da x_t für beide Vektoren d_r, d_s konstant ist, so folgt der wichtige Satz

$$d_r F_r = d_s F_s. \tag{71.}$$

Diese Funktion ist also symmetrisch in bezug auf alle drei Indizes 1, 2, 3 und offenbar eine neue trilineare Form, die wir mit H' bezeichnen und *die zu H adjungierte Form* nennen wollen; es ist also

$$H' = d_1F_1 = d_2F_2 = d_3F_3, \tag{72.}$$

und der Satz (69.) geht in

$$d_r H' = d_r^2 F_r = 2 F_s F_t \tag{73.}$$

über. Da zufolge (55.) der Vektor d_r den Bedingungen $d_r^2 x_r = d_r^2 y_r = 0$ genügt, so können wir hier die am Schlusse von § 3 bewiesenen Sätze (50.), (52.) anwenden. Zufolge (50.) läßt sich die Gleichung (73.) auch in der Form

$$F_r(d_r x_r, d_r y_r) = F_s F_t \tag{74.}$$

darstellen, und dies Resultat ist offenbar vollständig identisch mit dem Hauptsatze (11.) in § 1, welcher dort auf ganz anderem Wege bewiesen ist. Bezeichnet man ferner mit D_r die Diskriminante der Form F_r, so folgt aus (52.) die Gleichung

$$d_r F_r^2 - 2 F_r d_r^2 F_r = D_r (x_r d_r y_r - y_r d x_r)^2,$$

welche zufolge (72.), (73.), (58.) die Form

$$H'^2 - 4 F_r F_s F_t = D_r H^2$$

annimmt; da $F_r F_s F_t = F_1 F_2 F_3$ und H, H' symmetrisch in bezug auf die Indizes 1, 2, 3 sind, so folgt hieraus, daß die Formen F_1, F_2, F_3 dieselbe Diskriminante

$$D = D_1 = D_2 = D_3 \tag{75.}$$

besitzen, was mit dem Satze (3.) in § 1 übereinstimmt, und zugleich ergibt sich, daß zwischen den beiden trilinearen Formen H, H' und den drei quadratischen Formen F_1, F_2, F_3 die Identität

$$H'^2 - D H^2 = 4 F_1 F_2 F_3 \tag{76.}$$

besteht.

Der Satz (71.), auf welchem die Einführung der zu H adjungierten Form H' beruht, läßt sich auf einem zwar nicht kürzeren, aber mehr symmetrischen Wege beweisen, den ich hier noch andeuten will. Aus den Definitionen (55.), (56.), (62.), (63.) ergibt sich leicht die Vektoridentität

$$(d_t, e_r) = -d_t; \tag{77.}$$

vertauscht man r mit s und subtrahiert, so folgt $(d_t, e_s - e_r) = 0$, d. h. die beiden Vektoren d_t und $(e_s - e_r)$ sind permutabel. Unterwirft man daher die Gleichung (66.) nach der in (45.) angegebenen Regel dem Vektor d_t und benutzt das in (42.) erklärte Symbol, so erhält man

$$(d_t; d_r, d_s) = d_t F_t (e_s - e_r), \tag{78.}$$

und aus dem Satze (43.) folgt

$$(d_2F_2 - d_3F_3)e_1 + (d_3F_3 - d_1F_1)e_2 + (d_1F_1 - d_2F_2)e_3 = 0;$$

da aber die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 zufolge ihrer Definition (62.), (63.) offenbar ein irreduzibles System bilden, so müssen die drei Differenzen $(d_rF_r - d_sF_s)$ identisch verschwinden, wie zu beweisen war.

Ich bemerke endlich noch Folgendes. Wenn für eine partikuläre Form H die Form F_1 identisch verschwindet, so muß zufolge (72.), (74.) auch H' und mindestens eine der beiden Formen F_2, F_3 identisch verschwinden. Man findet leicht, daß das Verschwinden der beiden Formen F_1, F_2 stets und nur dann eintritt, wenn $H = h_{1,2}h_3$ ist, wo $h_{1,2}$ eine bilineare Funktion der Paare z_1, z_2, und h_3 eine lineare Funktion des Paares z_3 bedeutet. Verschwinden alle drei Formen F_1, F_2, F_3, so ist $H = h_1h_2h_3$ ein Produkt von drei linearen Faktoren, und umgekehrt.

§ 5.

Es liegt nahe, die eben geführte Untersuchung von der Form H auf die zu ihr adjungierte Form H' zu übertragen. Bezeichnet man mit d'_r, F'_r die Vektoren und quadratischen Formen, die hierbei aus den auf H bezüglichen Vektoren und Formen d_r, F_r hervorgehen, während die in (61.) erklärten Vektoren e_r ihre von H gänzlich unabhängige Bedeutung behalten, so ist

$$(79.) \qquad d'_r\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\frac{\partial H'}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r}\frac{\partial H'}{\partial x_r};$$

hieraus folgt zunächst die mit (57.) analoge Gleichung

$$(80.) \qquad d'_rH' = 0,$$

und durch den Vergleich mit (54.), (73.) ergibt sich

$$(81.) \qquad d'_rH = -d_rH' = -2F_sF_t;$$

ebenso entspricht der Gleichung (64.) die Gleichung

$$(82.) \qquad e_rH' = H'.$$

Sodann bemerken wir, daß die drei Vektoren d_r, e_r, d'_r gewiß ein *reduzibles* System bilden, weil die beiden Paare z_s, z_t sich gegen sie wie

Konstanten verhalten; es muß also eine Identität von der Form

$$\lambda d_r + \lambda' d'_r + \mu e_r = 0$$

bestehen, wo λ, λ', μ Funktionen bedeuten, die nicht alle verschwinden; unterwirft man dieser Identität die beiden Formen H, H' und berücksichtigt (57.), (64.), (80.), (81.), (82.), so folgt

$$\lambda'(-2F_sF_t) + \mu H = 0, \quad \lambda(2F_sF_t) + \mu H' = 0,$$

mithin wird

$$-H'd_r + Hd'_r + 2F_sF_te_r = 0. \tag{83.}$$

Wendet man dieses Resultat auf die Funktion F_r an und bedenkt, daß $d_rF_r = H'$, $e_rF_r = 2F_r$ ist, so folgt

$$-H'^2 + Hd'_rF_r + 4F_rF_sF_t = 0,$$

und zufolge (76.) ergibt sich

$$d'_rF_r = DH. \tag{84.}$$

Überträgt man jetzt den Satz (66.) auf die Form H', so erhält man

$$(d'_r, d'_s) = F''_t(e_s - e_r),$$

was als Definition der quadratischen Form F''_t angesehen werden kann. Läßt man diesen Vektor auf die Form F_s wirken, so wird die rechte Seite $= 2F_sF''_t$; da ferner $d'_rF_s = 0$, $d'_sF_s = DH$, also $(d'_r, d'_s)F_s = d'_rd'_sF_s = Dd'_rH = D(-2F_sF_t)$ ist, so folgt

$$F''_t = -DF_t; \tag{85.}$$

die gemeinsame Diskriminante D' der drei Formen F''_1, F''_2, F''_3 ist daher

$$D' = D^3, \tag{86.}$$

und die vorhergehende Vektoridentität wird

$$(d'_r, d'_s) = -DF_t(e_s - e_r) = -D(d_r, d_s). \tag{87.}$$

Endlich folgt aus der Definition (72.) der zu H adjungierten Form H', daß *die zu H' adjungierte Form* $= d'_tF''_t = -Dd'_tF_t = -D^2H$, also *die mit* $(-D^2)$ *multiplizierte erste Form* H ist, und hiermit leuchtet ein, daß die Identität (76.) bei dem Übergang von H zu H' sich nur mit $(-D^3)$ multipliziert. —

Die Form H und ihre Adjungierte H' bilden die Basis einer Schar von unendlich vielen trilinearen Formen

$$H''=Hp+H'q, \tag{88.}$$

wo p, q zwei *willkürliche Konstanten* bedeuten. Behandelt man eine solche Form H'' ebenso wie H in § 4 und definiert drei ihr entsprechende Vektoren d_r'' durch

$$d_r''\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial H''}{\partial y_r}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial H''}{\partial x_r}, \tag{89.}$$

so wird offenbar

$$d_r''H_r''=0,\ d_r''=pd_r+qd_r', \tag{90.}$$

und aus den für die Vektoren d_r, d_r' gefundenen Resultaten ergibt sich

$$d_r''H=-2F_sF_tq,\ d_r''H'=+2F_sF_tp, \tag{91.}$$

$$d_r''F_r=H'p+DHq, \tag{92.}$$

also

$$(d_r'',\ d_s'')F_s=d_r''d_s''F_s=2F_sF_tm, \tag{93.}$$

wo

$$m=p^2-Dq^2. \tag{94.}$$

Die aus der Form H'' entspringenden quadratischen Formen F_1'', F_2'', F_3'' sind nach (66.) durch die Vektoridentität

$$(d_r'',\ d_s'')=F_t''(e_s-e_r)$$

zu erklären, und aus (93.) folgt

$$F_t''=mF_t, \tag{95.}$$

$$(d_r'',d_s'')=mF_t(e_s-e_r)=m(d_r,\ d_s). \tag{96.}$$

Die Trias der zu den trilinearen Formen H'' der Schar (88.) gehörenden quadratischen Formen ist daher *invariant*, wenn man von gemeinsamen konstanten Faktoren m absieht. Drei solche Formen (95.) besitzen die gemeinsame Diskriminante

$$D''=Dm^2,$$

und für die zu H'' adjungierte Form $H'''=d_r''F_r'''$ findet man nach (95.), (92.) den Ausdruck

$$H'''=m(H'p+DHq); \tag{97.}$$

diese Form ist daher ebenfalls in der Schar (88.) enthalten.

Um endlich die aus (76.) hervorgehende Identität

$$H'''^2 - D'' H''^2 = 4 F_1''' F_2''' F_3''' \tag{98.}$$

zu bestätigen, wollen wir die *Quadratwurzeln* aus den Diskriminanten D und $D'' = Dm^2$ einführen und ihren Zusammenhang immer so bestimmen, daß

$$\sqrt{D''} = m\sqrt{D} \tag{99.}$$

wird; dann folgt aus (88.), (97.) die Gleichung

$$H''' + H''\sqrt{D''} = m(p + q\sqrt{D})(H' + H\sqrt{D}); \tag{100.}$$

ersetzt man hierin $\sqrt{D}$ durch $-\sqrt{D}$, also auch $\sqrt{D''}$ durch $-\sqrt{D''}$, und multipliziert beide Gleichungen mit einander, so folgt

$$H'''^2 - D'' H''^2 = m^3 (H'^2 - D H^2),$$

was zufolge (76.), (95.) mit der zu beweisenden Gleichung (98.) übereinstimmt. —

Der in (96.) erhaltene Satz gibt noch zu folgenden Bemerkungen Veranlassung. Entwickelt man den Vektor (d_r'', d_s'') nach den in § 3 angegebenen Regeln aus der Definition (90.), so wird

$$(d_r'', d_s'') = p^2 (d_r, d_s) + pq \{(d_r, d_s') + (d_r', d_s)\} + q^2 (d_r', d_s');$$

die Vergleichung mit (96.), wo $m = p^2 - Dq^2$, ergibt daher wieder den Satz (87.), und da der mit pq multiplizierte Vektor verschwinden muß, so erhält man den neuen Satz, daß der Vektor

$$(d_r, d_s') = (d_s, d_r'), \tag{101.}$$

also symmetrisch in bezug auf die beiden Indizes r, s ist. Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man nach der in § 3 angegebenen Regel (45.) die Identität (83.) dem Vektor d_s unterwirft und hierbei die Sätze (66.), (77.) benutzt; auf diese Weise erhält man den symmetrischen Ausdruck

$$H(d_s, d_r') = F_t \{2 F_r d_r - H' e_r + 2 F_s d_s - H' e_s\}, \tag{102.}$$

der sich aber noch einfacher darstellen läßt.

Führt man nämlich noch drei Vektoren δ_1, δ_2, δ_3 durch die gemeinsame Erklärung

$$\delta_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\frac{\partial F_r}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r}\frac{\partial F_r}{\partial x_r} \tag{103.}$$

ein,*) so folgt unmittelbar

(104.) $$\delta_r F_r = 0;$$

vergleicht man ferner (103.) mit den Definitionen (54.), (79.) und berücksichtigt (72.), (84.), so erhält man

(105.) $$\delta_r H = -d_r F_r = -H', \quad \delta_r H' = -d_r' F_r = -DH.$$

Die drei Vektoren δ_r, d_r, e_r bilden offenbar wieder ein *reduzibles* System, und wenn man ähnlich verfährt, wie bei der Herleitung des Satzes (83.), indem man die beiden vorstehenden Ausdrücke für $\delta_r F_r$, $\delta_r H$ benutzt, so ergibt sich

(106.) $$H\delta_r = 2F_r d_r - H' e_r,$$

wodurch die Gleichung (102.) in

(107.) $$(d_s, d_r') = F_t(\delta_r + \delta_s) = (d_r, d_s')$$

übergeht. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (83.), (106.) einmal d_r, dann e_r, mit Rücksicht auf (76.), so erhält man noch zwei ähnliche Relationen, die sich aber auch aus (104.), (105.) ableiten ließen; das System dieser vier Gleichungen, durch welche die Abhängigkeit von je drei der vier Vektoren e_r, d_r, d_r', δ_r ausgedrückt wird, ist das folgende:

(108.)
$$\begin{cases} * & DHd_r - H'd_r' + 2F_s F_t \delta_r = 0, \\ -DHe_r & * + 2F_r d_r' - H'\delta_r = 0, \\ H'e_r & -2F_r d_r * + H\delta_r = 0, \\ -2F_s F_t e_r + H'd_r - Hd_r' & * = 0. \end{cases}$$

§ 6.

Da jede binäre quadratische Form ein Produkt von zwei linearen Faktoren ist, so folgt aus (76.), daß jede der beiden konjugierten trilinearen Formen

(109.) $$U = \frac{1}{2}(H' + H\sqrt{D}), \quad V = \frac{1}{2}(H' - H\sqrt{D}),$$

deren Produkt

(110.) $$UV = F_1 F_2 F_3$$

*) Ich bemerke beiläufig, daß hieraus $\delta_r^2 x_r = Dx_r$, $\delta_r^2 y_r = Dy_r$ folgt.

ist, und welche als spezielle Fälle in der Schar der Formen (88.) enthalten sind, ein Produkt von drei linearen Faktoren ist. Wir nehmen im folgenden an, daß H eine allgemeine Form ist, d. h. daß ihre acht Koeffizienten α, β willkürliche Konstanten sind, und bezeichnen mit

$$\lambda_r = x_r + \omega_r y_r, \quad \mu_r = x_r + \omega_r' y_r \tag{111.}$$

lineare Funktionen des Paares z_r, in denen die Variable x_r den Koeffizient 1 hat. Bezeichnet man ferner die Koeffizienten der Formen F_r wie in (1.), so kann man zufolge (110.) gleichzeitig

$$U = L\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad V = M\,\mu_1\mu_2\mu_3 \tag{112.}$$

und

$$F_r = A_r\,\lambda_r\,\mu_r \tag{113.}$$

setzen, wo L, M Konstanten sind, die der Bedingung

$$L\,M = A_1 A_2 A_3 \tag{114.}$$

genügen,*) und die Konstanten ω_r, ω_r' sind als Wurzeln einer quadratischen Gleichung in ihrem Komplex durch

$$A_r(\omega_r + \omega_r') = B_r, \quad A_r\omega_r\omega_r' = C_r \tag{115.}$$

bestimmt; es kommt darauf an, sie genau von einander zu unterscheiden.

Läßt man die Form H'' in (88.) mit der Form U in (109.) zusammenfallen, indem man $2p = \sqrt{D}$, $2q = 1$ setzt, und behält für diese spezielle Form $H'' = U$ die Vektorbezeichnung d_r'' bei, so verschwindet die Konstante m in (94.), mithin verschwinden zufolge (95.) auch die drei quadratischen Formen F_r'' identisch, was mit den am Schluß von § 4 gemachten Bemerkungen vollständig übereinstimmt. Aus der Definition von d_r'' und aus (112.) ergibt sich sodann

$$d_r'' x_r = \frac{\partial U}{\partial y_r} = L\lambda_s\lambda_t\omega_r, \quad d_r'' y_r = -\frac{\partial U}{\partial x_r} = -L\lambda_s\lambda_t,$$

und hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$d_r''\lambda_r = 0, \quad d_r''\mu_r = L\lambda_s\lambda_t(\omega_r - \omega_r'),$$

deren erste auch eine unmittelbare Folge der Gleichung $d_r'' H'' = d_r'' U = 0$

*) Bezeichnet man die den Koeffizienten α, β der Form H entsprechenden Koeffizienten von H' mit α', β', so ist offenbar $2L = \alpha_0' + \alpha_0\sqrt{D}$, $2M = \alpha_0' - \alpha_0\sqrt{D}$.

ist. Zufolge (113.) wird daher

$$d_r'' F_r = A_r \lambda_r d_r'' \mu_r = A_r U(\omega_r - \omega_r'),$$

und da andererseits die Gleichung (92.) in

$$d_r'' F_r = \frac{1}{2}(H' \sqrt{D} + D H) = U \sqrt{D}$$

übergeht, so ergibt die Vergleichung beider Ausdrücke das unterscheidende Resultat

(116.) $$A_r(\omega_r - \omega_r') = \sqrt{D}.$$

Verbindet man dasselbe mit (115.), so folgt

(117.) $$\omega_r = \frac{B_r + \sqrt{D}}{2A_r}, \quad \omega_r' = \frac{B_r - \sqrt{D}}{2A_r},$$

und hierdurch sind die sechs linearen Funktionen λ_r, μ_r vollständig bestimmt.

Wir kehren nun noch einmal zu den durch die Form H gegebenen Vektoren d_r zurück, um ihnen die Funktionen U, V, λ_r, μ_r zu unterwerfen. Da $d_r H = 0$ und $d_r H' = 2 F_s F_t$ ist, so folgt aus den Definitionen (109.)

$$d_r U = d_r V = F_s F_t;$$

andererseits ergibt sich aus den Darstellungen (112.)

$$d_r U = L \lambda_s \lambda_t d_r \lambda_r, \quad d_r V = M \mu_s \mu_t d_r \mu_r;$$

vergleicht man diese Ausdrücke mit einander und berücksichtigt (113.), (114.), so folgt

(118.) $$A_r d_r \lambda_r = M \mu_s \mu_t, \quad A_r d_r \mu_r = L \lambda_s \lambda_t,$$

und die vorhergehenden Ausdrücke vereinigen sich in

(119.) $$d_r U = d_r V = F_s F_t = A_r d_r \lambda_r d_r \mu_r.$$

Bedenkt man nun, daß die homogenen linearen Funktionen λ_r, μ_r, wenn x_r, y_r durch $d_r x_r$, $d_r y_r$ ersetzt werden, in $d_r \lambda_r$, $d_r \mu_r$ übergehen, so läßt sich diese letzte Gleichung zufolge (113.) auch in der Form

$$F_r(d_r x_r,\ d_r y_r) = F_s F_t$$

darstellen, die wir früher in (74.) erhalten haben, und die, wie schon bemerkt, mit dem Hauptsatze (11.) in § 1 übereinstimmt. Die Gleichungen (118.) dagegen enthalten eine wichtige Ergänzung zu diesem Transformationssatze,

weil sie lehren, in welcher Weise hierbei die beiden Linearfaktoren von F_r sich transformieren, und dies ist von Bedeutung für die *Art*, in welcher nach *Gauß* die Formen F_s, F_t in die Transformation eintreten (vergl. den Schluß von § 2).

In ähnlicher Weise folgt aus (105.), wenn man den Vektor δ_r auf die Darstellungen (109.), (112.) wirken läßt,

$$(120.)\qquad \begin{cases} \delta_r U = -U\sqrt{D}, & \delta_r V = V\sqrt{D}, \\ \delta_r \lambda_r = -\lambda_r\sqrt{D}, & \delta_r \mu_r = \mu_r\sqrt{D}, \end{cases}$$

und hieraus nach (113.) wieder die Gleichung (104.).

§ 7.

Es ist schon in § 1 bemerkt, daß die Diskriminante D der drei Formen F_1, F_2, F_3 eine homogene Funktion vierten Grades von den acht Konstanten α, β ist, welche nach § 4 zugleich die Koeffizienten der Form H sind. Ich will jetzt zum Schluß noch auf die beherrschende Stellung aufmerksam machen, welche diese Funktion D einnimmt, indem ich nachweise, daß aus ihren partiellen Derivierten auch die Koeffizienten der zu H adjungierten Form H' und die der drei Formen F_1, F_2, F_3 sich bilden lassen.

Nach § 4 sind α_0, β_0, α_r, β_r resp. die Koeffizienten der Produkte $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $x_ry_sy_t$, $y_rx_sx_t$ in H, d. h. es ist

$$\alpha_0 = \frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t},\quad \beta_0 = \frac{\partial^3 H}{\partial y_r \partial y_s \partial y_t},\quad \alpha_r = \frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial y_s \partial y_t},\quad \beta_r = \frac{\partial^3 H}{\partial y_r \partial x_s \partial x_t},$$

und wir wollen mit α'_0, β'_0, α'_r, β'_r die entsprechenden Koeffizienten in der adjungierten Form H' bezeichnen. Für die letztere ergibt sich aus ihrer Definition (72.) der Ausdruck

$$H' = d_r F_r = \frac{\partial F_r}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial F_r}{\partial y_r}\frac{\partial H}{\partial x_r}$$
$$= (2A_rx_r + B_ry_r)\frac{\partial H}{\partial y_r} - (B_rx_r + 2C_ry_r)\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

mithin wird

$$\frac{\partial H'}{\partial x_r} = 2A_r\frac{\partial H}{\partial y_r} - B_r\frac{\partial H}{\partial x_r},\quad \frac{\partial H'}{\partial y_r} = B_r\frac{\partial H}{\partial y_r} - 2C_r\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

und durch fortgesetzte Derivationen erhält man daher

$$(121.)\qquad \begin{cases} \alpha_0' = 2A_r\beta_r - B_r\alpha_0, & \beta_0' = B_r\beta_0 - 2C_r\alpha_r, \\ \alpha_r' = 2A_r\beta_0 - B_r\alpha_r, & \beta_r' = B_r\beta_r - 2C_r\alpha_0. \end{cases}$$

Aus den in (2.) angegebenen Ausdrücken für die Koeffizienten A_r, B_r, C_r der Form F_r folgt nun

$$\frac{\partial C_r}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial A_r}{\partial \beta_0} = \frac{\partial C_r}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial A_r}{\partial \beta_r} = 0,$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial \beta_0} = \frac{\partial A_r}{\partial \alpha_r} = -\alpha_0, \quad \frac{\partial B_r}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial C_r}{\partial \beta_r} = -\beta_0,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial B_r}{\partial \beta_r} = -\alpha_r, \quad \frac{\partial C_r}{\partial \beta_0} = \frac{\partial B_r}{\partial \alpha_r} = -\beta_r,$$

mithin erhält man mit Rücksicht auf $D = B_r^2 - 4A_rC_r$ für die Koeffizienten von H' die Formeln

$$\alpha_0' = -2A_r\frac{\partial C_r}{\partial \beta_0} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial \beta_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \beta_0},$$

$$\beta_0' = -B_r\frac{\partial B_r}{\partial \alpha_0} + 2C_r\frac{\partial A_r}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \alpha_0},$$

$$\alpha_r' = -2A_r\frac{\partial C_r}{\partial \beta_r} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial \beta_r} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \beta_r},$$

$$\beta_r' = -B_r\frac{\partial B_r}{\partial \alpha_r} + 2C_r\frac{\partial A_r}{\partial \alpha_r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \alpha_r}.$$

Bezeichnet man daher mit (α, β) jedes der vier Paare (α_0, β_0), (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) und mit (α', β') das entsprechende Paar für die Form H', so wird

$$(122.)\qquad \alpha' = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \beta}, \quad \beta' = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \alpha}.$$

Hieraus erhält man für die beiden Paare (α_s', β_s'), (α_t', β_t'), indem man den Ausdruck $D = B_r^2 - 4A_rC_r$ beibehält und die Derivierten von A_r, B_r, C_r gemäß (2.) bildet, die Ausdrücke

$$(123.)\qquad \begin{cases} \alpha_s' = B_r\alpha_s - 2C_r\beta_t, & \beta_s' = 2A_r\alpha_t - B_r\beta_s, \\ \alpha_t' = B_r\alpha_t - 2C_r\beta_s, & \beta_t' = 2A_r\alpha_s - B_r\beta_t. \end{cases}$$

Bedient man sich der Bezeichnung für die allgemeine Komposition von rechteckigen, nach Zeilen und Spalten geordneten Größensystemen (Matrizen),

so kann man die acht Gleichungen (121.), (123.) in

$$(124.)\qquad \begin{pmatrix} B_r, & -2C_r \\ 2A_r, & -B_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_r, & \alpha_s, & \alpha_t, & \beta_0 \\ \alpha_0, & \beta_t, & \beta_s, & \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_r, & \alpha'_s, & \alpha'_t, & \beta'_0 \\ \alpha'_0, & \beta'_t, & \beta'_s, & \alpha'_r \end{pmatrix}$$

zusammenfassen; permutiert man die Indizes r, s, t, so erhält man für jeden der acht Koeffizienten α', β', drei äußerlich verschiedene Ausdrücke, die alle aus (122.) entspringen, wenn man D wie in (3.) durch die Koeffizienten der Formen F_1 oder F_2 oder F_3 darstellt.

Hiermit ist gezeigt, daß die Koeffizienten der zu H adjungierten Form H' durch Derivierte erster Ordnung von D dargestellt werden; durch fortgesetzte Derivation erhält man für die Koeffizienten der quadratischen Formen F_1, F_2, F_3 die folgenden Ausdrücke

$$(125.)\qquad \begin{cases} 6A_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\beta_0\partial\beta_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_s\partial\alpha_t}, \quad 6C_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_0\partial\alpha_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\beta_s\partial\beta_t}, \\ 6B_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_s\partial\beta_s} + \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_t\partial\beta_t} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_r\partial\beta_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_0\partial\beta_0}, \end{cases}$$

deren Analogie mit den Darstellungen (2.) von $-C_r$, $-A_r$, $+B_r$ ersichtlich ist; die Ausführung der Rechnung mag aber dem Leser überlassen bleiben.

Das in (122.) erhaltene Resultat reizt dazu, in dem von den sieben Paaren (α, β), (x_r, y_r) gebildeten, vierzehnfach ausgedehnten Raume einen Vektor δ einzuführen, welcher durch

$$(126.)\qquad \delta\alpha = \alpha', \quad \delta\beta = \beta', \quad \delta x_r = \delta y_r = 0,$$

also durch

$$(127.)\qquad \delta\varphi = \frac{1}{2}\sum^{(\alpha,\beta)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial D}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial D}{\partial\alpha} \right)$$

definiert wird, wo φ eine willkürliche Funktion bedeutet, und die Summe über alle vier Paare (α, β) auszudehnen ist. Da H eine homogene lineare Funktion der Größen α, β ist, so folgt aus (126.) unmittelbar

$$(128.)\qquad \delta H = H'.$$

Ersetzt man φ in (127.) durch $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_r}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_r}$, so folgt

$$(129.)\qquad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x_r} = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_r}, \quad \delta\frac{\partial\varphi}{\partial y_r} = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y_r},$$

d. h. der Vektor δ ist permutabel mit den Vektoren $\dfrac{\partial}{\partial x_r}$, $\dfrac{\partial}{\partial y_r}$; bedeutet daher

ψ_r eine beliebige Funktion, welche frei von den beiden Variabeln x_r, y_r des Paares z_r ist, so hat $\delta\psi_r$ dieselbe Eigenschaft, und wenn ε_r irgend einen der vier in (54.), (61.), (79.), (103.) erklärten Vektoren d_r, e_r, d'_r, δ_r bedeutet, die alle nur auf das Paar z_r wirken, so folgt hieraus

$$(\delta, \varepsilon_r)\psi_r = \delta\varepsilon_r\psi_r - \varepsilon_r\delta\psi_r = 0,$$

weil $\varepsilon_r\psi_r = \varepsilon_r\delta\psi_r = 0$ ist. Um also einen solchen Vektor (δ, ε_r) vollständig zu bestimmen, braucht man nur noch die beiden Funktionen $(\delta, \varepsilon_r)x_r$ und $(\delta, \varepsilon_r)y_r$ zu ermitteln.

Beginnt man mit dem Vektor $\varepsilon_r = d_r$ und berücksichtigt (126.), (128.), (129.), so erhält man

$$(\delta, d_r)x_r = \delta d_r x_r = \delta\frac{\partial H}{\partial y_r} = \frac{\partial \delta H}{\partial y_r} = \frac{\partial H'}{\partial y_r} = d'_r x_r$$

$$(\delta, d_r)y_r = \delta d_r y_r = \delta\Big(-\frac{\partial H}{\partial x_r}\Big) = -\frac{\partial \delta H}{\partial x_r} = -\frac{\partial H'}{\partial x_r} = d'_r y_r,$$

und da zugleich $(\delta, d_r)\psi_r = 0 = d'_r\psi_r$ ist, so folgt

(130.) $$(\delta, d_r) = d'_r.$$

Verfährt man ähnlich mit dem Vektor $\varepsilon_r = e_r$, so ergibt sich, daß δ permutabel mit e_r, also auch mit $(e_s - e_r)$ ist, d. h. es ist

(131.) $$(\delta, e_r) = 0, \quad (\delta, e_s - e_r) = 0.$$

Wendet man nun den Satz (43.) auf die drei Vektoren δ, d_r, d_s an und bedenkt, daß

$$(d_r, d_s) = F_t(e_s - e_r), \quad (d_s, \delta) = -d'_s, \quad (\delta, d_r) = d'_r$$

ist, so folgt zunächst

$$(\delta, F_t(e_s - e_r)) - (d_r, d'_s) + (d_s, d'_r) = 0;$$

zufolge (101.) ist aber $(d_r, d'_s) = (d_s, d'_r)$, und da nach der in (45.) angegebenen Regel

$$(\delta, F_t(e_s - e_r)) = F_t(\delta, e_s - e_r) + \delta F_t(e_s - e_r)$$

ist, wo das erste Glied rechts nach (131.) verschwindet, so ist $\delta F_t(e_s - e_r) = 0$, und hieraus folgt

(132.) $$\delta F_t = 0; \quad \delta A_t = \delta B_t = \delta C_t = 0,$$

also auch

(133.) $$\delta D = 0,$$

was übrigens auch unmittelbar aus (127.) folgt.

Läßt man jetzt den Vektor (130.) auf F_r wirken, so wird

$$\delta d_r F_r - d_r \delta_r F_r = d'_r F_r, \text{ und da } d_r F_r = H', \ \delta F_r = 0, \ d'_r F_r = DH$$

ist, so folgt

(134.) $$\delta^2 H = \delta H' = DH,$$

mithin

(135.) $$\delta^2 \alpha = \delta \alpha' = D\alpha, \quad \delta^2 \beta = \delta \beta' = D\beta,$$

was sich auch aus (121.) mit Rücksicht auf $\delta A_r = \delta B_r = \delta C_r = 0$ leicht ergeben würde.

Verfährt man endlich auf dieselbe Weise mit den Vektoren d'_r, δ_r, so erhält man, wie der Leser sofort finden wird,

(136.) $$(\delta, d'_r) = Dd_r, \quad (\delta, \delta_r) = 0.$$

Über komplexe Primzahlen in Linearformen.

Von Herrn *H. Weber* in Straßburg.

Einleitung.

Dirichlet stützt seinen berühmten Beweis von der unendlichen Anzahl von Primzahlen, die in einer Linearform enthalten sind, bekanntlich auf seine Theorie der Klassenzahlen quadratischer Formen. Die hauptsächlichste Schwierigkeit, die zu überwinden war, bestand in dem Beweise, daß die Grenzwerte gewisser unendlicher Reihen von Null verschieden sind. Zu diesem Zweck teilt *Dirichlet* diese Summen in drei Arten ein, deren erste nur eine Reihe mit unendlichem Grenzwert hat und dem Hauptcharakter entspricht; die zweite Art entspricht den Anzeps-Charakteren und die dritte den übrigen Charakteren. *Dirichlet* führt die Grenzwerte der zweiten Art auf die *Klassenzahl* der quadratischen Formen zurück, woraus ihr Nichtverschwinden folgt, und dann läßt sich dasselbe für die Reihen der dritten Art durch gewöhnliche Grenzbetrachtungen erweisen, die zwar durchaus einwandfrei sind, doch aber einigermaßen aus dem Geiste der Methode herausfallen. Zieht man aber statt der Klassenzahlen der quadratischen Formen die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper heran, so erledigt sich, wie *Dedekind* bemerkt hat, die Frage für die beiden Arten von Reihen mit einem Male.*)

Dirichlet hat seine Methode auch angewandt auf Linearformen mit komplexen Koeffizienten und hat, um auch hier den Nachweis von den unendlich vielen Primzahlen zu liefern, die Theorie der Klassenzahlen der

*) *Dirichlet - Dedekind* Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Auflage, Braunschweig 1894. S. 624.

quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten ausgebildet.*) Aber auch hier kann man, indem man statt der Kreisteilung die Lemniskatenteilung benutzt, ohne die Unterscheidung der zwei Arten von Reihen zum Ziele kommen.

In meinen drei Abhandlungen über Zahlengruppen in algebraischen Körpern**) habe ich die allgemeinen Grundsätze entwickelt, nach denen viel weitergehende Fragen nach der Verteilung der Primzahlen (oder Primideale) in gewissen Zahlengruppen entschieden werden können, die ich hier für den einfachsten Fall durchführen und zum Andenken an die hundertste Wiederkehr des Geburtstages von *Dirichlet* veröffentlichen will. Es kommt, wie man sieht, in letzter Instanz dabei auf den Nachweis eines höheren algebraischen Zahlkörpers von einer bestimmten Beziehung zu dem ursprünglich gegebenen Körper an, den man den *Klassenkörper* nennt. Solche Klassenkörper sind aber bis jetzt nur in den Fällen näher bekannt, daß der ursprünglich gegebene Körper rational oder quadratisch mit negativer Diskriminante ist, und in diesen Fällen wird er durch die *komplexe Multiplikation* der elliptischen Funktionen gegeben. Mit jeder dieser Fragen hängt dann auch ein Satz über den Grad eines solchen Körpers zusammen.

§ 1.

Der Gaußsche Zahlkörper.

Es sei J der *Gaußsche Zahlkörper*, d. h. der Körper zweiten Grades, der aus dem Körper R der rationalen Zahlen durch Adjunktion von $i=\sqrt{-1}$ entsteht. Die *ganzen Zahlen* in J sind die Zahlen der Form $x+yi$, worin x und y *ganze rationale* Zahlen sind. In J sind nur die vier *Einheiten*

$$\varepsilon = +1, -1, +i, -i \tag{1.}$$

enthalten, und je vier Zahlen in J wie $\xi, -\xi, i\xi, -i\xi$ heißen *assoziiert*. Unter der *Norm* einer komplexen Zahl $\xi=x+yi$ versteht man die positive rationale Zahl

$$N(\xi)=x^2+y^2. \tag{2.}$$

*) Vgl. die Abhandlungen XXX, XXXI, XXXII in *Dirichlets* Werken Bd. I S. 503—617, ferner *Hilbert*, über den *Dirichlet*schen biquadratischen Zahlkörper. Mathematische Annalen Bd. XLV. S. 309—340.

**) Mathematische Annalen Bd. XLVIII, XLIX, L.

Assoziierte Zahlen haben dieselbe Norm.

Die Primzahlen in J sind die Primfaktoren der natürlichen Primzahlen. Die natürliche Primzahl 2 ist wegen

$$2 = -i(1+i)^2 \tag{3.}$$

mit dem Quadrat der komplexen Primzahl $(1+i)$ assoziiert. Die ungeraden natürlichen Primzahlen zerfallen in zwei Arten, nämlich erstens solche von der Form $4n+3$, die auch in J Primzahlen sind, — wir bezeichnen sie, wenn unterschieden werden soll, mit q, — und zweitens solche von der Form $4n+1$, die wir mit p bezeichnen und die in J in zwei konjugiert imaginäre Faktoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ zerlegt werden:

$$p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'. \tag{4.}$$

Betrachtet man also assoziierte Primzahlen als nicht wesentlich verschieden, so gibt es in J keine andern Primzahlen als

$$1+i,\ \mathfrak{p},\ q \tag{4.}$$

und es ist

$$N(1+i)=2, \quad N(\mathfrak{p})=p, \quad N(q)=q^2. \tag{5.}$$

Die Primzahlen $1+i$ und $\mathfrak{p}$ heißen *vom ersten Grad*, q vom *zweiten Grad*, weil die Normen der beiden ersteren *natürliche Primzahlen* sind, während die Norm von q das *Quadrat einer natürlichen* Primzahl ist.

Es sei nun μ irgend eine komplexe ganze Zahl, und Ω sei der Inbegriff aller ganzen Zahlen α in J, die zu μ relativ prim sind. Es gibt dann in Ω eine endliche Anzahl von Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \tag{6.}$$

von der Art, daß jede Zahl α mit einer und nur mit einer dieser Zahlen α_i nach μ kongruent ist, und die Anzahl dieser Zahlen ist

$$\psi(\mu) = N(\mu)\,\Pi\Big(1-\frac{1}{N(\varkappa)}\Big), \tag{7.}$$

wenn $\varkappa$ die Gesamtheit der in μ aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen durchläuft.*)

*) Die Ableitung dieser bekannten Resultate findet sich unter anderen in des Verfassers Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Braunschweig 1898, 1899. Bd. I, § 181, Bd. II, § 168. In der Folge werde ich dieses Werk kurz mit „Algebra“ zitieren.

Wenn die vier Einheiten ε nach μ inkongruent sind, so können wir für vier der Zahlen (6.) $+1, -1, +i, -i$ wählen, und das ganze System dieser Zahlen zerfällt in

$$h = \frac{1}{4}\psi(\mu) \tag{8.}$$

Teilsysteme. Bezeichnet E das System dieser vier Einheiten, so können wir diese Teilsysteme so bezeichnen:

$$E\alpha_1, E\alpha_2, E\alpha_3, \cdots E\alpha_h. \tag{9.}$$

Ist aber $\mu = 2$, so sind die vier Einheiten paarweise ($+1, -1$ und $+i, -i$) unter einander kongruent, und wenn $\mu = 1+i$ ist, so sind sie alle vier kongruent. In diesen beiden Fällen gilt die Zerlegung (9.) gleichfalls noch, nur ist dann $h = \frac{1}{2}\psi(\mu)$ und $h = \psi(\mu)$, in beiden Fällen also $h = 1$ zu setzen. Außerdem ist noch $h = 1$, wenn $\mu = 2+i$, $\mu = 2(1+i)$, $\mu = 3+i$ ist, in allen anderen Fällen ist $h > 1$.

Die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_h$ in (9.) sind so auszuwählen, daß irgend eines von ihnen, α_i, mit keiner der Zahlen $E\alpha_k$ nach μ kongruent ist, wenn i von k verschieden ist. Wir teilen nun die sämtlichen Zahlen α in h Klassen ein:

$$A_1, A_2, \cdots A_h, \tag{10.}$$

indem wir eine Zahl in A_i aufnehmen, wenn sie mit einer Zahl des Systems $E\alpha_i$ kongruent ist (immer nach dem Modul μ).

Es kommt dann jede Zahl α in einer und nur in einer dieser Klassen vor, und assoziierte Zahlen sind in derselben Klasse enthalten.

Kommt α_i in A_i, α_k in A_k vor, so ist das Produkt $\alpha_i\alpha_k$ in einer durch A_i und A_k allein bestimmten Klasse A_l enthalten, und wir nennen A_l aus A_i und A_k *komponiert* oder *zusammengesetzt*. Bei dieser Zusammensetzung gilt, wie bei der Multiplikation, das assoziative und das kommutative Gesetz, und die Klassen (10.) bilden daher eine *Abelsche Gruppe*, die ich mit $\mathfrak{A}$ bezeichne.

Die Einheit dieser Gruppe ist die *Hauptklasse* A_1, die aus allen Zahlen α besteht, die einer der Kongruenzen

$$\alpha \equiv \varepsilon \pmod{\mu}$$

genügen.

§ 2.

Reelle Primzahlen in der Linearform.

Das Ziel unserer Untersuchung ist der Nachweis, daß in einer Linearform

(1.) $$\lambda = \mu\xi + \alpha,$$

in der μ und α relativ prim sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sind, wenn ξ das System der ganzen Zahlen in J durchläuft.

Wir erledigen zunächst einfach die Frage nach den in (1.) enthaltenen *reellen* Primzahlen q.

Wenn λ überhaupt reell sein soll, so muß, wenn

$$\mu = m + ni, \quad \xi = x + yi, \quad \alpha = a + bi$$

ist,

(2.) $$my + nx + b = 0$$

sein. Es muß also diese diophantische Gleichung eine Lösung x, y haben, und dies trifft immer und nur unter der Bedingung zu, *daß der größte gemeinschaftliche Teiler von m und n auch in b aufgeht.*

Ist diese Bedingung befriedigt, so nehmen wir irgend eine spezielle Zahl ξ_0, für die λ reell wird, also, wenn wir durch Akzente die konjugiert imaginären Zahlen bezeichnen

(3.) $$\mu\xi_0 + \alpha = \mu'\xi_0' + \alpha' = c,$$

wo c reell ist. Dann setzen wir in (1.)

$$\xi = \mu' z + \xi_0,$$

mit reellem z. Dadurch geht (1.) über in

(4.) $$\lambda = \mu\mu' z + c,$$

und $\mu\mu'$ ist reell. Es ist aber c relativ prim zu $\mu\mu'$, denn jeder Teiler von μ und c müßte nach (3.) zugleich Teiler von α sein, und jeder Teiler von μ' und c müßte Teiler von α' sein. Wäre aber ein Teiler von μ', c und α' vorhanden, so wäre die konjugierte Zahl Teiler von μ, c, α, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Nach dem von *Dirichlet* bewiesenen Satz sind daher in der *reellen* Linearform (4.) unendlich viele *reelle Primzahlen* enthalten. Diese sind

zugleich Primzahlen in J, wenn sie $\equiv 3 \pmod 4$ sind, und von diesen sind ebenfalls unendlich viele in der Form λ enthalten, wenn die Kongruenz

$$\mu\xi + \alpha \equiv 3 \pmod 4$$

überhaupt lösbar ist. Dies ist immer der Fall, wenn μ nicht durch $(1+i)$ teilbar, also $N(\mu)$ ungerade ist, sonst dann und nur dann, wenn $\alpha - 3$ durch den größten gemeinschaftlichen Teiler von μ und 4 teilbar ist. Also haben wir den Satz:

Die Linearform $\mu\xi + \alpha$ stellt dann und nur dann unendlich viele Primzahlen zweiten Grades des Körpers J dar, wenn

1. der größte reelle Teiler von μ in dem imaginären Teil von α aufgeht,

2. $\alpha - 3$ durch den größten gemeinschaftlichen Teiler von μ und 4 teilbar ist.

Es handelt sich weiter noch um die *komplexen* Primzahlen der Linearform λ. Wenn α in die Klasse A (§ 1 (10.)) gehört, so erhält man die ganze Klasse A, wenn man ξ in den vier Linearformen

$$\mu\xi + \alpha,\ \mu\xi - \alpha,\ \mu\xi + i\alpha,\ \mu\xi - i\alpha$$

sämtliche ganze Zahlen des Körpers J durchlaufen läßt; ist aber einer von diesen Ausdrücken, etwa der erste, eine Primzahl, so sind es auch die drei

$$\mu(-\xi) - \alpha,\ \mu(i\xi) + i\alpha,\ \mu(-i\xi) - i\alpha,$$

und daraus ergibt sich, daß in *jeder* dieser Formen unendlich viele komplexe Primzahlen enthalten sind, wenn es in der Klasse A deren unendlich viele gibt. Dies letztere haben wir also noch zu beweisen.

§ 3.

Die Gruppencharaktere.

Jedes Element A der Gruppe $\mathfrak{A}$ *gehört* zu einem bestimmten Exponenten a, d. h. es gibt einen gewissen kleinsten positiven Exponenten a von der Art, daß

(1.) $$A^a = 1$$

ist, wenn wir mit 1 kurz das Hauptelement der Gruppe $\mathfrak{A}$ bezeichnen. A heißt dann auch *vom Grade a*. Zu jedem Element A gibt es ein entgegengesetztes

oder reziprokes A^{-1}, das der Bedingung

$$A A^{-1} = 1$$

genügt. Ist A die Hauptklasse, so ist $A = A^{-1}$. Außerdem ist A^{-1} noch dann mit A identisch, wenn A vom zweiten Grade ist. Diese Elemente heißen *Anzeps-Elemente*.

Der Grad a eines Elementes ist immer ein Teiler des Grades h der Gruppe. Wir setzen

(2.) $$h = ab$$

(Algebra Bd. II, S. 11).

Zu der Gruppe $\mathfrak{A}$ gehören h *Charaktere*

(3.) $$\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_h,$$

d. h. Funktionen, die für jedes Element A von $\mathfrak{A}$ je einen bestimmten von Null verschiedenen Wert haben und der Bedingung genügen:

$$\chi(A_i)\,\chi(A_k) = \chi(A_i A_k).$$

Alle Werte $\chi(A)$ sind h-te Einheitswurzeln.

Diese Funktionen haben die Eigenschaft, daß das Produkt $\chi_i(A)\,\chi_k(A)$ unter den $\chi(A)$ enthalten ist, und wenn

$$\chi_i(A)\,\chi_k(A) = \chi_i(A)$$

ist, so ist χ_i nur von χ_i, χ_k, nicht aber von dem besonderen Element A abhängig. Wir nennen χ_l aus χ_i und χ_k komponiert und setzen

$$\chi_i(A)\,\chi_k(A) = \chi_i \chi_k(A).$$

Die Charaktere (3.) bilden demnach gleichfalls eine *Abel*sche Gruppe vom h-ten Grade, in der die Einheit der *Hauptcharakter* χ_1 ist, der für jedes Element den Wert 1 hat. Andererseits ist $\chi_k(1) = 1$ für jedes χ_k.

Wir haben außerdem die Sätze:

1. *Durchläuft A die Elemente von $\mathfrak{A}$, und ist χ einer der Charaktere, so ist*

$$\sum_{A} \chi(A) = h \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem χ der Hauptcharakter ist oder nicht.

2. *Durchläuft χ die Gruppe der Charaktere, so ist*

$$\sum^{\chi}\chi(A)=h \quad oder \quad =0,$$

je nachdem A die Hauptklasse ist oder nicht (**Algebra II, § 13**).

3. *Gehört A zum Exponenten a, so sind alle*

$$\chi_1(A), \chi_2(A), \dots \chi_h(A)$$

a-te Einheitswurzeln und jede a-te Einheitswurzel kommt darunter gleich oft, also b-mal, vor (**Algebra II, § 13, § 198**).

Ist eine Zahl α in A enthalten, so setzen wir

$$\chi_i(A)=\chi_i(\alpha)$$

und dadurch sind die *Charaktere*

(4.) $$\chi_1(\alpha), \chi_2(\alpha), \dots \chi_h(\alpha)$$

für jede Zahl α aus Ω eindeutig definiert.

Assoziierte Zahlen haben dieselben Charaktere.

§ 4.

Die zu den Klassen A gehörigen Summen A(s).

In jeder Klasse A ist eine unendliche Menge von Zahlen enthalten, aber es gibt darunter nur eine endliche Anzahl, deren Norm eine gegebene positive Zahl n nicht übersteigt. Um eine Schätzung dieser Zahl zu gewinnen, nehmen wir eine beliebige Zahl α aus Ω, lassen ξ das System der ganzen Zahlen in J durchlaufen und zählen, wie viele unter den Zahlen

(1.) $$\omega=\mu\xi+\alpha$$

die Eigenschaft haben, daß

(2.) $$N(\omega)\leqq n$$

ist. Diese Zahl bezeichnen wir mit $Z(n)$. Im allgemeinen kommen in der Form (1.) nicht die mit ω assoziierten Zahlen vor, obwohl sie in derselben Klasse A enthalten sind. Es ist also die Anzahl der Zahlen in A, die der Bedingung (2.) genügen, gleich $4Z(n)$. Nur in den beiden Ausnahmefällen $\mu=2$ und $\mu=1+i$ ist diese Zahl $2Z(n)$ und $Z(n)$.

Wir setzen nun

$$\alpha=\mu(a+bi), \quad \xi=x+yi, \quad N(\mu)=m.$$

Es sind dann a und b *gebrochene rationale Zahlen*, x und y durchlaufen beide das System der *ganzen rationalen Zahlen* und m ist eine feste *ganze Zahl*.

Die Bedingung (2.) wird dann:

$$m[(x+a)^2+(y+b)^2] \leqq n,$$

und wenn wir

$$(3.) \qquad x_1 = \frac{x+a}{\sqrt{n}}, \qquad y_1 = \frac{y+b}{\sqrt{n}}$$

setzen,

$$(4.) \qquad x_1^2 + y_1^2 \leqq \frac{1}{m}.$$

Wir betrachten x_1, y_1 als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene; dann wird vermöge (3.), da x, y alle ganzzahligen Werte und nur solche haben können, diese Ebene mit einem *Gitter* überzogen, dessen quadratische Felder die Seite $1:\sqrt{n}$ und die Fläche $1:n$ haben. Zu jedem Gitterpunkt gehört ein bestimmtes dieser Felder, wenn man jedes Quadrat derjenigen seiner vier Ecken zuordnet, deren Koordinaten den kleinsten Wert haben. Es bedeutet dann $Z(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte, die im Innern oder an der Grenze eines Kreises liegen, der durch die in (4.) enthaltene Gleichung dargestellt ist und also den Koordinatenanfangspunkt zum Mittelpunkt und die Größe

$$r = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

zum Radius hat, den wir den Kreis (r) nennen wollen. Die Quadrate, die zu diesen Gitterpunkten gehören, liegen ganz oder teilweise im Innern dieses Kreises und umgekehrt werden alle die Quadrate, die ganz im Innern des Kreises liegen, den zugehörigen Gitterpunkt ebenfalls im Innern oder an der Peripherie des Kreises haben, während nur einige von denen, die durch die Kreisperipherie durchschnitten werden, ihre Gitterpunkte außerhalb des Kreises haben können.

Wir ziehen noch zwei weitere Kreise (r'), (r''), deren Peripherien von dem Kreise (r) um die Diagonale der Quadrate, also um $\sqrt{2}:\sqrt{n}$ abstehen, setzen also

$$r' = r - \sqrt{\frac{2}{n}}, \qquad r'' = r + \sqrt{\frac{2}{n}};$$

dann liegen in dem Ring zwischen (r') und (r'') alle die Quadrate, die von der Peripherie (r) durchschnitten werden, und es ist also die Kreisfläche (r') kleiner und (r'') größer als die Gesamtfläche der Quadrate, deren Gitterpunkte innerhalb oder an der Grenze von (r) liegen, d. h. es ist

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2<\frac{Z(n)}{n}<\pi\left(\frac{1}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2,$$

und wenn wir also

$$Z(n)=\frac{\pi n}{m}+M\sqrt{n} \tag{5.}$$

setzen, so ergeben sich für M die Grenzen

$$\frac{2\pi}{\sqrt{n}}-\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{m}}<M<\frac{2\pi}{\sqrt{n}}+\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{m}},$$

wofür man auch, da $m>1$, $n\geqq 1$ ist, setzen kann:

$$-4\pi<M\leqq 4\pi. \tag{6.}$$

M ist also eine Funktion von n, die zwischen festen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt, wie sehr auch n wachsen mag.

Das Verhältnis $Z(n):n$ ist also bei unendlich wachsenden n endlich und von der besonderen Klasse A unabhängig.

Da die Normen aller ganzen Zahlen in J positive ganze Zahlen sein müssen, so ist die Anzahl der Zahlen (1.), deren Norm gleich n ist:

$$Z(n)-Z(n-1).$$

Es bedeute jetzt s eine Veränderliche, größer als 1, und wir bilden die Summe

$$A(s)=\Sigma\frac{1}{(N\alpha)^s}, \tag{7.}$$

die sich auf alle Zahlen α der Klasse A erstreckt, mit der Maßgabe, *daß von vier assoziierten Zahlen, die ja dieselbe Norm haben, nur eine aufgenommen werden soll.*

Danach können wir $A(s)$ auch so darstellen:

$$A(s)=\sum^{\xi}\frac{1}{(N(\mu\xi+\alpha))^s},^{*})$$

*) In den beiden Fällen $\mu=2$, $\mu=1+i$ müßte rechts noch mit $^1/_2$ oder $^1/_4$ multipliziert werden. Wir wollen diese Ausnahmefälle, die kein besonderes Interesse bieten, weiterhin nicht immer ausdrücklich erwähnen.

worin α festgehalten wird und ξ die ganzen Zahlen von J durchläuft. Wenn wir die Glieder dieser Summe nach wachsenden Werten der Norm ordnen, so erhalten wir

$$(8.)\qquad \begin{cases} A(s) = \sum_{1,\infty}^{n} \dfrac{Z(n)-Z(n-1)}{n^s} \\ \qquad = \sum_{1,\infty}^{n} Z(n)\Big(\dfrac{1}{n^s}-\dfrac{1}{(n+1)^s}\Big), \end{cases}$$

weil, solange $s>1$ ist, $Z(n):n^s$ mit unendlich wachsenden n verschwindet.

Setzt man

$$(9.)\qquad \frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}=\frac{s}{n^{s+1}}-\frac{1}{n^{s+1}(n+1)}-\frac{(s-1)\Theta}{n^{s+2}},$$

also

$$\Theta=n-\frac{n^s}{(n+1)(s-1)}\Big(1-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-s+1}\Big),$$

so findet man durch die Eingrenzung

$$\lambda-\frac{\lambda^2}{2}<e^{-\lambda}<\lambda,$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}<\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)<\frac{1}{n},$$

wenn man $\lambda=(s-1)\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$ setzt, die Grenzen für Θ:

$$\frac{n}{n+1}<\Theta<1+\frac{s}{2}$$

oder, wenn man $s<2$, $n\leqq 1$ annimmt:

$$\frac{1}{2}<\Theta<2,$$

und es ist also Θ zwischen festen numerischen Grenzen eingeschlossen.

Darnach bilden wir die Summe $A(s)$, indem wir für $Z(n)$ den Ausdruck (5.) einsetzen:

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum^{n}\Big(\frac{\pi}{m}n+M\sqrt{n}\Big)\Big(\frac{s}{n^{s+1}}-\frac{1}{n^{s+1}(n+1)}-\frac{(s-1)\Theta}{n^{s+2}}\Big) \\ &= \frac{\pi}{m}\sum^{n}\frac{s}{n^s}-\frac{\pi}{m}\sum^{n}\frac{1}{n^s(n+1)}-\frac{\pi}{m}\sum^{n}\frac{(s-1)\Theta}{n^{s+1}} \\ &\quad +\sum\frac{Ms}{n^{s+\frac{1}{2}}}-\sum\frac{M}{n^{s+\frac{1}{2}}(n+1)}-(s-1)\sum\frac{\Theta M}{n^{s+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

und daraus

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} A(s)-\frac{\pi}{m(s-1)} &= \frac{\pi}{m}\Big(\sum^{n}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{s-1}\Big)+\frac{\pi}{m}(s-1)\sum^{n}\frac{1}{n^s} \\ &\quad -\frac{\pi}{m}\sum^{n}\frac{1}{n^s(n+1)}-\frac{\pi}{m}(s-1)\sum^{n}\frac{\Theta}{n^{s+1}} \\ &\quad +s\sum^{n}\frac{M}{n^{s+\frac{1}{2}}}-\sum^{n}\frac{M}{n^{s+\frac{1}{2}}(n+1)} \\ &\quad -(s-1)\sum\frac{\Theta M}{n^{s+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Wir lassen jetzt s in 1 übergehen. Es ist dann bekanntlich

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\sum^{n}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{s-1}=C \text{ (gleich der } \textit{Euler}\text{schen Konstanten } 0{,}5772\ldots),$$

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}(s-1)\sum^{n}\frac{1}{n^s}=1,$$

$$\operatorname{Lim}\sum\frac{1}{n^s(n+1)}=\sum\frac{1}{n(n+1)}=1,$$

während die übrigen Summen in (10.) stetige Funktionen von s sind.

Also ergibt sich:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\Big(A(s)-\frac{\pi}{m(s-1)}\Big)=\frac{\pi}{m}C+\sum^{n}\frac{M}{\sqrt{n}(n+1)},$$

welches ein bestimmter endlicher (nur von m und der Klasse A abhängiger) Wert ist. Wir setzen also

$$(11.)\qquad A(s)=\frac{\pi}{m(s-1)}+G,$$

und hierin ist G eine Funktion von s, die für $s=1$ in einen bestimmten endlichen Wert übergeht, der für die verschiedenen Klassen A verschieden sein kann.

Die verschiedenen G bezeichnen wir, wenn eine Unterscheidung nötig ist, entsprechend den verschiedenen Klassen A, mit $G(A)$.

§ 5.

Beziehung der Summen $A(s)$ zu den Primzahlen des Körpers J.

Es sei jetzt wieder $\chi_i(A_k)$ der i-te Charakter der k-ten Klasse, χ_1 der *Hauptcharakter*. Ich bilde die Summen

$$(1.) \qquad \overset{A}{\Sigma}\chi_i(A)\,A(s)=Q_i,$$

die sich über alle Klassen A erstrecken.

Es ergibt sich nach § 4 (11.) und § 3, 1., wenn h die Anzahl der Klassen A ist:

$$(2.) \qquad \begin{cases} Q_1=\dfrac{\pi h}{m(s-1)}+\overset{A}{\Sigma}G(A), \\ Q_i=\qquad\qquad \overset{A}{\Sigma}\chi_i(A)\,G(A). \end{cases} \qquad (i\neq 1)$$

Lassen wir jetzt s in 1 übergehen, so gehen hiernach

$$(s-1)\,Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \dots\ Q_h$$

in *endliche Werte* über.

Wir wollen zunächst zeigen, in welcher Beziehung diese Summen Q_i zu den Primzahlen des Körpers J stehen. Wir führen zu diesem Zweck die am Schluß des § 3 erklärten Charaktere $\chi(\alpha)$ der Zahlen von Ω ein und erhalten

$$(3.) \qquad Q(s)=\overset{\alpha}{\Sigma}\frac{\chi(\alpha)}{(N\alpha)^s},$$

worin sich die Summe auf alle Zahlen α von Ω erstreckt, jedoch so, daß von vier assoziierten Zahlen nur *eine* beizubehalten ist. Diese Summe ist unbedingt konvergent, solange $s>1$ ist. Nun läßt sich in bekannter Weise $Q(s)$ auch durch ein unendliches Produkt darstellen:

$$(4.) \qquad Q(s)=\overset{\mathfrak{p}}{\Pi}\frac{1}{1-\chi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}},$$

das sich über alle in Ω enthaltenen Primzahlen $\mathfrak{p}$ erstreckt (die reellen Primzahlen des Körpers J eingeschlossen) (vgl. *Dirichlet-Dedekind* 4. Auflage, S. 132. Algebra II, § 197), und indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren dieses Produktes nach Potenzen von $(N\mathfrak{p})^{-s}$ entwickelt:

$$(5.) \qquad \log Q(s)=\Sigma\frac{\chi(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{\chi(\mathfrak{p})^2}{(N\mathfrak{p})^{2s}}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{\chi(\mathfrak{p})^3}{(N\mathfrak{p})^{3s}}+\cdots,$$

worin die Summen sich auf *alle* Primzahlen $\mathfrak{p}$ erstrecken.

Hier bleibt freilich in dem Logarithmus von $Q(s)$ ein Vielfaches von $2\pi i$ unbestimmt. Es kommt aber darauf nicht an, da sich dieses Vielfache mit s stetig ändern müßte und folglich von s unabhängig ist.

In der Formel (5.) sind nun, den h Charakteren χ entsprechend, h verschiedene Formeln enthalten. Wir nehmen eine beliebige Klasse A, multiplizieren (5.) mit $\chi(A^{-1})$ und summieren alle diese Gleichungen. So erhalten wir nach § 3, 2.:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{h}\sum^{i}\chi_i(A^{-1})\log Q_i(s) \\ = \sum\frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{(N\mathfrak{p}^2)^s}+\frac{1}{3}\sum\frac{1}{(N\mathfrak{p}^3)^s}+\cdots, \end{cases}$$

worin sich die erste, zweite, dritte, ... Summe der rechten Seite auf alle Primzahlen $\mathfrak{p}$ erstreckt, deren erste, zweite, dritte, ... Potenz in A enthalten ist.

Die erste dieser Summen zerfällt in zwei Bestandteile

$$S=\sum\frac{1}{(N\mathfrak{p})^{-s}},\qquad S_1=\sum\frac{1}{q^{-2s}},$$

wenn wir die Summe S auf alle *komplexen Primzahlen* $\mathfrak{p}$, S' auf alle *reellen Primzahlen* q der Klasse A beziehen.

Für die folgenden Summen setzen wir

$$S_2=\sum\frac{1}{(N\mathfrak{p}^2)^s},\qquad S_3=\sum\frac{1}{(N\mathfrak{p}^3)^s},\ \ldots,$$

worin die reellen und komplexen Primzahlen nicht mehr unterschieden zu werden brauchen.

Alle die Summen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ haben für $s=1$ einen *endlichen* Wert, und auch die Summe

$$S_1+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\cdots$$

bleibt für $s=1$ *endlich.* (Algebra II, § 198.)

Auf der linken Seite wird Q_1 für $s=1$ unendlich, während $Q_2, Q_3, \ldots Q_h$ endlich bleiben. Es ist also auch $\log Q_1$ unendlich und $\log Q_2, \log Q_3, \ldots \log Q_h$ bleiben endlich, *wenn die Grenzwerte von* $Q_2, Q_3, \ldots Q_h$ *von Null verschieden sind.*

Dann würde aber aus (6.) folgen, daß S für $s=1$ unendlich wird, und dies könnte nur dann geschehen, wenn die Summe aus unendlich vielen Gliedern bestände. Damit wäre also bewiesen, *daß in jeder Klasse* A, *also auch in jeder Linearform* $\mu\xi+\alpha$, *unendlich viele komplexe Primzahlen vorkommen.*

Um den Beweis vorzubereiten, daß die $Q_2(s), Q_3(s), \ldots Q_h(s)$ für $s=1$ von Null verschieden sind, bilden wir zunächst das Produkt:

$$(5.) \qquad Q_1(s)\, Q_2(s) \ldots Q_h(s) = \overset{\chi}{\Pi}\, \overset{\mathfrak{p}}{\Pi} \frac{1}{1-\chi(\mathfrak{p})\,(N\mathfrak{p})^{-s}},$$

wo das erste Produkt über *alle* Primzahlen (komplexe und reelle), das zweite über alle Charaktere χ zu nehmen ist.

Gehört nun $\mathfrak{p}$ zum Exponenten a, d. h. ist a wie in § 1 die kleinste positive Zahl, für die

$$\mathfrak{p}^a \equiv \varepsilon \pmod{\mu}$$

ist, und $h=ab$, so sind die $\chi(\mathfrak{p})$ nach § 3, 3. a-te Einheitswurzeln und jede a-te Einheitswurzel kommt darunter b-mal vor.

Vereinigt man diese in dem Produkt, so ergibt sich

$$(6.) \qquad (s-1)\, Q_1(s)\, Q_2(s) \ldots Q_h(s) = \overset{\mathfrak{p}}{\Pi} \frac{s-1}{(1-(N\mathfrak{p})^{-sa})^b}.$$

Ist $\mathfrak{p}$ eine komplexe Primzahl, $\mathfrak{p}'$ die konjugierte, so ist $N\mathfrak{p}=N\mathfrak{p}'=p$ eine reelle Primzahl, aber $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ können zu verschiedenen Exponenten a, b gehören. Ist $\mathfrak{p}$ eine reelle Primzahl q, so ist $N\mathfrak{p}=q^2$.

Die Faktoren des Produktes (6.) teilen wir in zwei Klassen ein, indem wir setzen

$$(7.) \qquad P = \overset{\mathfrak{p}}{\Pi} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}},$$

worin wir das Produkt über alle *komplexen Primzahlen, die zum Exponenten 1 gehören, ausdehnen, und*

$$(8.) \qquad R = \overset{\mathfrak{p}}{\Pi} \frac{1}{(1-(N\mathfrak{p})^{-sa})^b}$$

erstreckt über die übrigen Primzahlen, also *über alle reellen Primzahlen des Körpers J und über die komplexen Primzahlen, die zu einem höheren Exponenten als 1 gehören.* Dann ist nach (6.)

$$(9.) \qquad (s-1)\, Q_1(s)\, Q_2(s) \ldots Q_h(s) = (s-1)\, P^h R.$$

Für $s=1$ bleibt die linke Seite dieses Ausdruckes, wie wir bewiesen haben, endlich, und wir haben noch zu zeigen, daß sie auch von *Null verschieden* bleibt. Nach bekannten elementaren Sätzen über die Konvergenz unendlicher Produkte behält aber auch R für $s=1$ einen endlichen von Null

verschiedenen Wert. Es bleibt daher $(s-1)P^h$ für $s=1$ endlich und es ist noch nachzuweisen, daß es von Null verschieden bleibt. Da die Faktoren des Produktes P alle größer als 1 sind, so können wir beim weiteren Beweis eine beliebige *endliche Anzahl* dieser Faktoren aus P weglassen und zu R nehmen.

Wenn K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper ist und $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit der *Primideale ersten Grades* dieses Körpers durchläuft, so gilt der Satz, daß das Produkt

$$(10.) \qquad (s-1)\,\Pi\,\frac{1}{1-N_K(\mathfrak{P})^{-s}}$$

für $s=1$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwert hat. Hierin bedeutet das Zeichen N_K die im Körper K genommene Norm. und s geht von größeren Werten stetig in 1 über. Unter einem Primideal ersten Grades ist ein solches zu verstehen, dessen Norm im Körper K eine natürliche Primzahl ist. Der Satz bleibt bestehen, wenn in (10.) eine beliebige *endliche Anzahl* von Primzahlen weggelassen wird.*)

Die Formel (10.) habe ich schon in meiner Algebra zu dem unmittelbar daraus abzulesenden Schluß benutzt, daß es in *jedem algebraischen Körper* unendlich viele Primideale ersten Grades gibt.

Hier aber liefert sie uns den gesuchten Beweis unter der Voraussetzung, daß wir einen Körper K kennen, der folgende Eigenschaften hat:

1. *Der Körper K enthält den Körper J und der Relativgrad n von K in bezug auf J ist nicht größer als h:*

$$n \leqq h.$$

---

*) Vgl. Algebra II, S. 727. Der Beweis wird dadurch geführt, daß der Grenzwert des Produktes (10.) neben anderen nicht verschwindenden Faktoren in dem Ausdruck für das Produkt gH vorkommt. Darin bedeutet H die Anzahl der Idealklassen im Körper K, die niemals verschwinden kann, und g eine von den Einheiten in K abhängige, gleichfalls von Null verschiedene Zahl (Algebra S. 716).

Ich benutze diesen Anlaß, um einen Fehler zu berichtigen, der sich in meiner Algebra findet. Auf S. 697 muß die Formel (13.) lauten

$$|\lambda_s - \gamma_s u| < nk\delta_s.$$

In der Zeile 24 derselben Seite muß $|g_s|$ statt γ_s stehen und in der Formel (14.) im dritten Gliede ng statt g; ebenso ng statt g in der Zeile 3 v. u. und in der letzten Zeile $\frac{2ng}{a}$ statt $\frac{(n+1)g}{a}$. Auf die weiteren Schlüsse hat dieser Fehler keinen Einfluß.

2. *Jede komplexe Primzahl* $\mathfrak{p}$ *in* J, *die in bezug auf* μ *zum Exponenten 1 gehört, ist in* K *in lauter Primfaktoren ersten Grades zerlegbar.*

3. *Jede reelle Primzahl* q *und jede komplexe Primzahl* $\mathfrak{p}$, *die in bezug auf* μ *zu einem höheren Exponenten als 1 gehört, ist in* K *nur in Primfaktoren von höherem als erstem Grade zerlegbar.*

4. *Von den Forderungen 2. und 3. kann eine beliebige endliche Anzahl von Primzahlen* $\mathfrak{p}$, q *ausgenommen sein.*

Wenn der Körper K diese Bedingungen erfüllt, so ist

$$N_K(\mathfrak{p}) = (N\mathfrak{p})^n, \tag{11.}$$

wenn die Norm links im Körper K, rechts im Körper J genommen ist. Ferner ist, wenn $\mathfrak{P}$ ein Ideal ersten Grades in K ist, das in $\mathfrak{p}$ aufgeht,

$$N_K(\mathfrak{P}) = N(\mathfrak{p}), \tag{12.}$$

und wenn $\mathfrak{p}$ in lauter Primideale ersten Grades zerlegbar ist, so muß die Anzahl gleich n sein, also

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n . \tag{13.}$$

Die Primideale in K, die in höherer als der ersten Potenz in Primzahlen in J aufgehen, müssen in der Diskriminante des Körpers K aufgehen, kommen also nur in endlicher Anzahl vor, und können nach 4. unberücksichtigt bleiben.

Demnach wird das in (10.) vorkommende Produkt

$$\Pi \frac{1}{1 - N_K(\mathfrak{P})^{-s}} = \Pi \frac{1}{(1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^n} = P^n,$$

und es hat also

$$(s-1)P^n \tag{14.}$$

für $s = 1$ einen *endlichen, von Null verschiedenen Wert*, und folglich wird P selbst für $s = 1$ *unendlich.*

Andererseits wissen wir aus (9.), daß

$$(s-1)P^h \tag{15.}$$

für $s = 1$ einen endlichen (wenn auch vielleicht verschwindenden) Wert hat, und folglich zeigt der Quotient von (15.) und (14.), daß P^{h-n} *nicht unendlich ist.* Aus beidem zusammen aber folgt, daß $h - n$ *nicht positiv* sein kann, also

$$n \geqq h,$$

was mit der Voraussetzung 1. nur verträglich ist, wenn

$$h = n \tag{16.}$$

ist, und dann ergibt sich aus (14.), daß $(s-1)P^h$ für $s=1$ von Null verschieden ist. Folglich sind dann auch die $Q_2, Q_3, \ldots Q_h$ von Null verschieden.

Wir haben also das Resultat:

5. *Wenn ein den Bedingungen 1. bis 4. genügender Körper K existiert, so ist sein Relativgrad in bezug auf J gleich h, und*

6. *In jeder der h Klassen von Ω nach dem Modul μ gibt es unendlich viele komplexe Primzahlen* $\mathfrak{p}$.

In den folgenden Betrachtungen können wir die besonderen Fälle $\mu = 1+i$, $\mu = 2$ ganz außer acht lassen, weil in diesen Fällen Ω nur *eine* Klasse bildet, in der schon nach dem allgemeinen vorhin angeführten Satze unendlich viele Primzahlen existieren.

§ 6.

Teilung der lemniskatischen Funktion.

Einen Körper K, wie er im Vorangehenden verlangt wird, liefert uns nun die Teilung der elliptischen Funktionen und zwar speziell der *lemniskatischen Funktionen.*

Ich werde bei den folgenden Betrachtungen öfter genötigt sein, auf mein Buch „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen“ (Braunschweig, 1891) zurückzugreifen, und ich werde dieses Werk kurz mit E. F. zitieren.

Ich betrachte die ϑ-Funktionen mit dem Modul $\omega = 1+i$ und erhalte, da hier

$$\omega = 1 - \frac{1}{\omega - 1}$$

ist, nach E. F. S. 77, S. 111

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} e^{\pi u^2}\vartheta_{11}(u) = -i\vartheta_{11}(iu), \\ e^{\pi u^2}\vartheta_{10}(u) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_{00}(iu), \\ e^{\pi u^2}\vartheta_{01}(u) = \vartheta_{01}(iu), \\ e^{\pi u^2}\vartheta_{00}(u) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta_{10}(iu); \end{cases}$$

$$(2.)\quad k^2=-1,\quad K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\quad iK'=(1+i)K,\quad 2Ku=v;$$

$$(3.)\qquad \mathrm{sn}\,iv=i\,\mathrm{sn}\,v,\qquad \mathrm{cn}\,iv=\mathrm{dn}\,v,\qquad \mathrm{dn}\,iv=\mathrm{cn}\,v.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$x=\mathrm{sn}\,v,\qquad y=\mathrm{cn}\,v,\qquad z=\mathrm{dn}\,v,$$

so haben wir (E. F. § 60) die Multiplikationsformeln:

$$(4.)\qquad \begin{array}{lll} & \text{gerades } m & \text{ungerades } m \\ \mathrm{sn}\,mv= & \dfrac{xyz\,A(x^2)}{D(x^2)}, & =x\,\dfrac{A(x^2)}{D(x^2)}, \\ \mathrm{cn}\,mv= & \dfrac{B(x^2)}{D(x^2)}, & =y\,\dfrac{B(x^2)}{D(x^2)}, \\ \mathrm{dn}\,mv= & \dfrac{C(x^2)}{D(x^2)}, & =z\,\dfrac{C(x^2)}{D(x^2)}. \end{array}$$

Hierin kann m jede natürliche Zahl bedeuten; A, B, C, D sind ganze Funktionen von x^2, von denen keine zwei einen gemeinschaftlichen Teiler haben, und deren Koeffizienten *ganze rationale Zahlen* sind. Die Funktionen A, D und das Produkt BC hängen nur von x^4 ab, und es gilt der Satz:

1. *Die Koeffizienten der höchsten Potenz von x sind, abgesehen vom Vorzeichen, in den Funktionen*

$$A,\ B,\ C,\ D$$

$$m,\ 1,\ 1,\ 1 \text{ bei geradem } m$$

$$1,\ 1,\ 1,\ m \text{ bei ungeradem } m,$$

und das von x unabhängige Glied in

$$A,\ B,\ C,\ D$$

$$m,\ 1,\ 1,\ 1 \text{ bei geradem und ungeradem } m.$$

Die Formeln (4.) gelten in unserem Fall auch für einen komplexen Multiplikator. Setzen wir nämlich $\mu=a+bi$, so ergibt sich aus dem Additionstheorem

$$\mathrm{sn}\,\mu v=\frac{\mathrm{sn}\,av\,\mathrm{cn}\,ibv\,\mathrm{dn}\,ibv+\mathrm{sn}\,ibv\,\mathrm{cn}\,av\,\mathrm{dn}\,av}{1+\mathrm{sn}^2 av\,\mathrm{sn}^2 ibv}$$

und folglich durch Anwendung der Formeln (4.) auf die einzelnen Bestandteile:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}\mu v = xyz\dfrac{F_\mu(x^4)}{\Phi_\mu(x^4)}, & \mu \text{ gerade} \\ \operatorname{sn}\mu v = \quad x\dfrac{F_\mu(x^4)}{\Phi_\mu(x^4)}, & \mu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Hier heißt μ gerade oder ungerade, je nachdem seine Norm a^2+b^2 gerade oder ungerade ist. F_μ und Φ_μ sind ganze Funktionen von x^4 ohne gemeinschaftlichen Teiler, und die Koeffizienten in diesen Funktionen sind Zahlen des Körpers J.

2. *Setzen wir jetzt*

$$(6.)\qquad \sigma(u)=(\operatorname{sn} 2Ku)^4,$$

so hat $\sigma(u)$ zu Perioden die ganzen Zahlen des Körpers J.

Es ist außerdem

$$(7.)\qquad \sigma(iu)=\sigma(u),\ \sigma\Big(u+\frac{1+i}{2}\Big)=\frac{1}{\sigma(u)},\ \sigma\Big(\frac{1}{2}\Big)=1,$$

und $\sigma(u)$ verschwindet immer und nur dann, wenn u gleich einer ganzen Zahl des Körpers J ist.

Bedeutet ω eine gebrochene Zahl des Körpers J, so gibt es eine gewisse ganze Zahl μ von möglichst kleiner Norm von der Art, daß $\mu\omega$ eine ganze Zahl wird. Es soll dann μ *der Nenner* der Zahl ω heißen. Er ist durch ω bis auf einen Einheitsfaktor $(\pm 1, \pm i)$ bestimmt, und die Zahlen $\mu\omega$ und μ sind relativ prim. Ist m die Norm von μ, so ist auch $m\omega$ eine ganze Zahl.

3. *Zwei Zahlen ω, ω' sollen kongruent heißen ($\omega'\equiv\omega$, schlechthin ohne Beziehung auf einen Modul), wenn sich ω' von ω oder einer seiner Assoziierten um eine ganze Zahl unterscheidet, wenn also eine der vier Differenzen $\omega'\pm\omega$, $\omega'\pm i\omega$ eine ganze Zahl ist. Kongruente Zahlen haben denselben Nenner.*

Die Zahlen $\sigma(\omega)$ und $\sigma(\omega')$ haben dann und nur dann denselben Wert, wenn ω und ω' kongruent sind.

Ist μ der Nenner von ω und wird in (4.)

$$m=\mu\mu'=N(m),\qquad v=2K\omega$$

gesetzt, so verschwindet $\operatorname{sn} mv$, und es verschwindet also $A(x^2)$ für $x^4=\sigma(\omega)$, und $\sigma(\omega)$ ist eine Wurzel der Gleichung

$$A(\sqrt{x})=0.$$

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $\omega \equiv \frac{1}{2}$ und folglich $\sigma(\omega)=1$ ist, weil in diesem Fall $\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$ verschwinden würde. Ist also μ und folglich m ungerade, so ergibt sich aus 1., daß $\sigma(\omega)$ eine *ganze algebraische Zahl* ist. (Algebra II, § 148. f.) Ist μ durch $(1+i)$, aber nicht durch 2, folglich $m=2m_1$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, so folgt aus der Formel (E. F. S. 204)

$$A_m = 2A_{m_1}B_{m_1}C_{m_1}D_{m_1},$$

daß $\sigma(\omega)$ eine Wurzel der Gleichung $B_{m_1}C_{m_1}D_{m_1}=0$ ist, und folglich ist nach 1. in diesem Falle $1:\sigma(\omega)$ eine ganze algebraische Zahl.

Ist aber $\mu=(1+i)\mu_1$, $\omega_1=(1+i)\omega$, $\sigma(\omega)=\sigma$, $\sigma(\omega_1)=\sigma_1$, so folgt aus dem Additionstheorem:

$$\sigma_1(1-\sigma)^2+4\sigma=0,$$

und daraus ergibt sich, daß, wenn $1:\sigma_1$ eine ganze Zahl ist, sowohl σ als $1:\sigma$ ganze Zahlen sind, also σ eine Einheit ist.

Damit ist der Satz bewiesen:

4. *Die Zahlen $\sigma(\omega)$ sind algebraische Zahlen und bei ungeradem Nenner ist $\sigma(\omega)$, bei geradem Nenner $1:\sigma(\omega)$ eine ganze algebraische Zahl.*

Setzen wir in der Gleichung (5.) $\mu\nu$ gleich einer Periode, so folgt, daß $F_\mu(x)$ nur dann verschwindet, wenn $x=\sigma(\omega')$ ist, worin ω' eine Zahl bedeutet, deren Nenner μ' ein Teiler von μ ist (wieder abgesehen von dem Fall $\mu=2$). Befreit man also die Funktion $F_\mu(x)$ von allen Teilern, die sie mit den verschiedenen niedrigeren $F_\mu(x)$ gemein hat, was durch rationale Rechnung geschieht, so ergibt sich eine Funktion $P_\mu(x)$, die nur die von einander verschiedenen $\sigma(\omega)$ zu Wurzeln und zwar zu einfachen Wurzeln hat, in denen der Nenner von ω *gleich* μ ist. Es handelt sich noch um die Bestimmung der Anzahl dieser Werte. Dazu führt die Klasseneinteilung des § 1. Es zeigt sich nämlich, daß zwei Zahlen ω, ω' mit dem Nenner μ dann und nur dann mit einander kongruent sind, wenn $\mu\omega$ und $\mu\omega'$ derselben Klasse A angehören, und folglich ist die Anzahl der von einander verschiedenen Werte $\sigma(\omega)$ gleich der Anzahl h dieser Klassen (§ 1 (8.)).

5. *Die Zahlen $\sigma(\omega)$ sind, wenn ω den Nenner μ hat, die Wurzeln einer Gleichung in J:*

(8.) $$P_\mu(x)=0$$

vom Grade h.

Jeder der Klassen

(9.) $$A_1, A_2, \ldots A_h$$

entspricht ein Wert von $\sigma(\omega)$, und wenn wir also die Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h$$

so wählen, daß

(10.) $$\mu\omega_1 = \alpha_1, \quad \mu\omega_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad \mu\omega_h = \alpha_h$$

Repräsentanten dieser Klassen sind, so gehört zu jeder dieser Klassen ein Wert aus der Reihe

(11.) $$\sigma_1 = \sigma(\omega_1), \quad \sigma_2 = \sigma(\omega_2), \quad \ldots \quad \sigma_h = \sigma(\omega_h).$$

Sind ω_1, ω_2 zwei Zahlen des Nenners μ, so ist

$$\mu\omega_1\omega_2 = \alpha_1\omega_2 = \alpha_2\omega_1$$

ebenfalls eine Zahl des Nenners μ, und wenn $\sigma(\omega_1)$, $\sigma(\omega_2)$ zu den Klassen A_1, A_2 gehören, so gehört $\sigma(\mu\omega_1\omega_2)$ in die Klasse A_1A_2.

Wir wählen jetzt die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$ ungerade, was bei geradem μ notwendig, bei ungeradem μ wenigstens immer möglich ist, und wenden die Formel (5.), nachdem wir beiderseits in die vierte Potenz erhoben haben, auf $\mu = \alpha_1$ an. Dann setzen wir $v = \omega$ und $v = \alpha_2\omega$, worin ω den Nenner μ haben soll, und es ergibt sich

$$\sigma(\alpha_1\omega) = \Psi_{\alpha_1}(\sigma(\omega)), \quad \sigma(\alpha_1\alpha_2\omega) = \Psi_{\alpha_1}(\sigma(\alpha_2\omega)),$$

wenn Ψ_{α_1} eine in J rationale Funktion bedeutet, die nur von der Klasse A_1 abhängig ist, in die α_1 gehört. Nun ist aber ebenso $\sigma(\alpha_2\omega) = \Psi_{\alpha_2}(\sigma(\omega))$, und es folgt also

$$\sigma(\alpha_1\alpha_2\omega) = \Psi_{\alpha_1}\Psi_{\alpha_2}(\sigma(\omega)).$$

Hier kann aber auch α_1 mit α_2 vertauscht werden und daraus folgt:

6. *Die Größen σ_1, $\sigma_2 \ldots \sigma_h$ sind die Wurzeln einer im Körper J Abelschen Gleichung; sie gehören also einem Abelschen Zahlkörper K_μ über J an, dessen Grad höchstens gleich h ist.*

Nehmen wir diesen Körper K_μ für K, so ist die Forderung § 5, 1. befriedigt.

Ist ν eine beliebige ungerade ganze Zahl in J, so gibt die zweite Gleichung (5.)

(12.) $$\frac{\mathrm{sn}\,2K\nu u}{\mathrm{sn}\,2Ku} = \frac{F_\nu(x)}{\Phi_\nu(x)}$$

wenn $x = \sigma(u)$ gesetzt ist.

Ersetzt man hierin u durch $u+\frac{1+i}{2}$, so geht x nach (7.) in $1:x$ über und $\mathrm{sn}2Ku$ und $\mathrm{sn}2K\nu u$, abgesehen vom Vorzeichen, in die reziproken Werte. Wir haben also

$$\frac{\mathrm{sn}2Ku}{\mathrm{sn}2K\nu u}=\frac{F_\nu\left(\frac{1}{x}\right)}{\Phi_\nu\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\Phi_\nu(x)}{F_\nu(x)}. \tag{13.}$$

Ist n der Grad der Funktionen F_ν und Φ_ν und ε eine Konstante, so ist, da F und Φ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben,

$$\begin{cases} \varepsilon x^n F_\nu\left(\frac{1}{x}\right)=\Phi_\nu(x), \\ \varepsilon F_\nu(x)=x^n\Phi_\nu\left(\frac{1}{x}\right), \end{cases} \tag{14.}$$

und aus (13.) folgt $\varepsilon^2=\pm 1$, also ε eine Einheit.

Wenn wir also setzen

$$F_\nu(x)=x^n+\gamma_1x^{n-1}+\gamma_2x^{n-2}+\cdots+\gamma_{n-1}x+\gamma_n, \tag{15.}$$

so ergibt sich

$$\Phi_\nu(x)=\varepsilon(1+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\cdots+\gamma_{n-1}x^{n-1}+\gamma_nx^n), \tag{16.}$$

und aus (12.) für $u=0$:

$$\gamma_n=\varepsilon\nu. \tag{17.}$$

Aber auch die übrigen Koeffizienten $\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_{n-1}$ sind ganze Zahlen des Körpers J.

Denn die Wurzeln von $F_\nu(x)=0$ sind in der Form $\sigma\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)$ enthalten, worin α eine ganze Zahl ist, und mithin sind nach 4. alle Wurzeln von $F_\nu(x)$ ganze Zahlen. Aus diesen Wurzeln setzen sich aber die Koeffizienten γ durch Addition und Multiplikation zusammen und daher sind diese Koeffizienten gleichfalls ganze Zahlen (Algebra Bd. II S. 555).

Aus (12.) erhalten wir nach (6.) durch Erheben in die vierte Potenz:

$$(\Phi_\nu(x))^4\sigma(\nu u)-x(F_\nu(x))^4=0, \tag{18.}$$

und wenn wir $\sigma(\nu u)$ als gegeben ansehen, so sind die Wurzeln dieser Gleichung

$$x=\sigma\left(u+\frac{\beta}{\nu}\right),$$

worin β ein Restsystem nach dem Modul ν durchläuft. Das von x unabhängige Glied in (18.) ist aber nach (16.) gleich $\sigma(\nu u)$, und wir erhalten daher

$$\frac{\sigma(\nu u)}{\sigma(u)} = \overset{\beta}{\Pi}\sigma\left(u+\frac{\beta}{\nu}\right), \tag{19.}$$

worin β ein Restsystem nach ν mit Ausschluß der Null durchläuft. Setzen wir darin $u=\alpha_i:\mu$, so können wir ν so bestimmen, daß

$$\nu\alpha_i \equiv \alpha_k \pmod{\mu}$$

wird, worin α_i, α_k zwei beliebige der Zahlen (10.) sind, und dann ergibt sich aus (19.)

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_i} = \overset{\beta}{\Pi}\sigma\left(\frac{\alpha_i}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}\right). \tag{20.}$$

Hier ist nun die rechte Seite entweder selbst eine ganze Zahl oder (bei geradem μ) ihr reziproker Wert ist eine ganze Zahl. Da aber h und i auch vertauscht werden können, so folgt, daß beides zugleich gilt und der Quotient ist daher eine *Einheit*, also:

7. *Die Größen* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_h$ *oder ihre reziproken Werte sind assoziierte ganze Zahlen des Körpers* K_μ.

Es enthält aber (20.) noch eine weitere Konsequenz: Daraus, daß die rechte Seite eine Einheit ist, folgt das gleiche für jeden ihrer Faktoren; diese sind Zahlen des Körpers $K_{\mu\nu}$ und daher können wir den Satz aussprechen:

8. *Wenn in* μ *zwei oder mehr verschiedene Primzahlen aufgehen, so sind die Zahlen* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_h$ *Einheiten des Körpers* K_μ.

Nehmen wir jetzt ν als ungerade *Primzahl* in J an, so sind die sämtlichen Wurzeln von $F_\nu(x)=0$ dargestellt durch $\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)$, worin β ein Restsystem nach dem Modul ν mit Ausschluß der Null durchläuft. Diese sind aber nach 7. unter einander assoziiert, und es folgt also aus (15.) und (17.)

$$\nu = e\left(\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)\right)^n, \tag{21.}$$

worin β eine beliebige durch ν nicht teilbare ganze Zahl in J und e *eine Einheit in* K_ν ist. Der Grad n ist in diesem Falle $=\frac{1}{4}(N(\nu)-1)$; also wenn ν komplex und $N(\nu)=p$ ist, gleich $\frac{1}{4}(p-1)$ und wenn $\nu=q$ reell ist, gleich $\frac{1}{4}(q^2-1)$.

Irgend ein in ν aufgehendes Primideal $\mathfrak{P}$ des Körpers K_ν geht daher in $\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)$ und folglich in allen Wurzeln von (15.) auf. Die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ dieser Funktion sind aber die symmetrischen Grundfunktionen dieser Wurzeln, und folglich sind diese Koeffizienten alle durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Da sie aber außerdem in J enthalten sind, und ν in J eine Primzahl ist, so sind sie auch durch ν teilbar. (Algebra II S. 645).

Daraus folgt:

9. *Ist ν eine Primzahl, so sind die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu$ der Funktion F_ν alle durch ν teilbar.*

Demnach ergibt sich, immer unter der Voraussetzung, daß ν eine Primzahl sei, aus (18.) die für ein unbestimmtes u gültige Kongruenz

$$\sigma(\nu u) \equiv \sigma(u)^{N(\nu)} \pmod{\nu}. \tag{22.}$$

Wir stützen uns nun auf den Hilfssatz:

10. *Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal in irgend einem algebraischen Körper K, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade sei, d. h. daß $N_K(\mathfrak{P})$ die erste Potenz einer natürlichen Primzahl p sei, die, daß für jede ganze Zahl ω des Körpers K die Kongruenz besteht:*

$$\omega^p \equiv \omega \pmod{\mathfrak{P}} \tag{23.}$$

(Algebra II § 167).

Setzen wir in (22.) für u eine der Zahlen $\alpha_i : \mu$, so entsteht rechts und links eine ganze Zahl des Körpers K_μ, oder, wenn μ gerade ist, das Reziproke einer ganzen Zahl.

Ist ν eine komplexe Primzahl $\mathfrak{p}$ in J, also $N(\nu)$ gleich einer reellen Primzahl von der Form $4m+1$, und $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{p}$ aufgehendes Primideal des Körpers K_μ, und Θ gleich σ oder gleich $1:\sigma$, so folgt aus (22.)

$$\Theta\left(\frac{\mathfrak{p}\alpha_i}{\mu}\right) \equiv \Theta\left(\frac{\alpha_i}{\mu}\right)^p \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Gehört $\mathfrak{p}\alpha_i$ in die Klasse A_k und setzen wir $\Theta\left(\frac{\alpha_i}{\mu}\right) = \Theta_i$, so folgt hieraus

$$\Theta_k \equiv \Theta_i^p \pmod{\mathfrak{P}}. \tag{24.}$$

Schließen wir die in endlicher Anzahl vorhandenen Primzahlen aus, die in der Diskriminante von P_μ aufgehen, so ist $\Theta_k - \Theta_i$ nur dann durch $\mathfrak{P}$ teilbar, wenn $A_k = A_i$ ist, also $\mathfrak{p}$ der *Hauptklasse* angehört.

Demnach folgt nach 10. aus (24.):

11. *Eine komplexe Primzahl* $\mathfrak{p}$ *in* J *enthält kein Primideal ersten Grades in* K_μ, *wenn* $\mathfrak{p}$ *nicht der Hauptklasse angehört.*

Denn die Kongruenz (23.) ist für $\omega = \Theta_i$ nicht befriedigt.

12. *Eine reelle Primzahl des Körpers* J, *d. h. eine Primzahl* q *von der Form* $4m+3$, *enthält kein Primideal ersten Grades in* K_μ.

Denn die Kongruenz (23.) ist in diesem Fall schon für $\omega = i$, was auch zum Körper K_μ gehört, nicht befriedigt.

Ist aber $\mathfrak{p}$ eine komplexe Primzahl der Hauptklasse, so ist $\Theta_i = \Theta_k$, also aus (24.)

$$\Theta_i^p \equiv \Theta_i \pmod{\mathfrak{P}}. \tag{25.}$$

Jede ganze Zahl ω in K_μ läßt sich als ganze Funktion (höchstens vom Grade $h-1$) von Θ_i darstellen und zwar mit Koeffizienten in J, die zwar gebrochen sein können, aber im Nenner können nur solche Primzahlen aufgehen, die auch in der Diskriminante von P_μ aufgehen (Algebra II, § 162).

Wir können daher setzen

$$k\omega = k_0 + k_1\Theta_i + k_2\Theta_i^2 + \ldots + k_{h-1}\Theta_i^{h-1},$$

worin k, k_0, $k_1, \ldots k_{h-1}$ ganze Zahlen in J sind und k relativ prim zu $\mathfrak{P}$ ist. Es ist aber nach dem *Fermat*schen Satz:

$$k^p \equiv k,\ k_0^p \equiv k_0,\ k_1^p \equiv k_1, \ldots \pmod{p}$$

und daraus folgt:

$$k\omega^p \equiv k\omega \pmod{\mathfrak{P}},$$

oder, da k durch $\mathfrak{P}$ nicht teilbar ist,

$$\omega^p \equiv \omega \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Also folgt:

13. *Eine komplexe Primzahl* $\mathfrak{p}$ *der Hauptklasse zerfällt in* K_μ *in Primideale ersten Grades.*

Damit sind, mit Rücksicht auf § 5, 4. die Forderungen 2., 3. befriedigt und der Hauptsatz § 5, 6. bewiesen.

Aus § 5, 5. ergibt sich dann:

14. *Die Funktion P_μ ist im Körper J irreduzibel.*

Es möge noch ein Satz angeführt werden, der, wenn er auch nicht gerade zu unserem Thema gehört, für andere Zwecke wichtig ist:

15. *Ist ν eine ungerade Primzahl im Körper J, so ist $\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)$ eine Primzahl im Körper K_ν.*

Das ergibt sich wegen der Irreduzibilität von P_ν aus (21.); denn ist $\mathfrak{P}$ ein in $\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right)$ aufgehendes Primideal in K_ν, und

$$\sigma\left(\frac{\beta}{\nu}\right) = \mathfrak{P}\,\mathfrak{A},$$

so folgt, wenn man in (21.) die Partialnorm $\mathfrak{N}$ in bezug auf J nimmt,

$$\nu^n = (\mathfrak{N}(\mathfrak{P}))^n\,\mathfrak{N}(\mathfrak{A}),$$

woraus, da $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ Potenzen von ν sein müssen, zu schließen ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) = 1$, $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \nu$.

Zusatz zu § 5.

Aus den Sätzen des § 5 ergeben sich noch zwei Folgerungen, die, wenn sie auch für den nächsten Zweck dieser Abhandlung nicht notwendig sind, für andere Untersuchungen wichtig sein könnten.

7. *Wenn ein Klassenkörper K vom Relativgrade h existiert, so gibt es keinen Körper über J von höherem Grade als h, der den Bedingungen § 5, 2., 3., 4. entspricht.*

Denn angenommen, es wäre K' ein solcher Körper vom Grade n und $n \geqq h$, so würde sich wie in § 5 (14.) ergeben, daß $(s-1)\,P^n$ für $s=1$ endlich und von Null verschieden ist. Andererseits ist aber auch, wie schon bewiesen, $(s-1)\,P^h$ endlich und von Null verschieden, und daraus folgt $n = h$. Daraus folgt weiter:

8. *Es kann nur einen Klassenkörper K geben.*

Nehmen wir nämlich an, es gebe zwei solche Körper K und H, die nach dem Bewiesenen beide vom Grade h sind, und nehmen wir zwei *primitive ganze* Zahlen ξ, η dieser Körper, so lassen sich die ganzen rationalen

Zahlen a, b so bestimmen, daß

$$\theta = a\xi + b\eta \tag{1.}$$

eine *primitive* ganze Zahl des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (K, H) dieser beiden Körper ist. Wir bestimmen a und b so, daß die h^2 Werte, die θ nach (1.) annehmen kann, alle von einander verschieden sind, und erhalten θ als Wurzel einer Gleichung vom Grade h. Wir nehmen nach § 5, 4. alle Primzahlen aus, die in der Diskriminante dieser Gleichung aufgehen.

Ist dann $\mathfrak{P}$ ein in der natürlichen Primzahl p aufgehendes Primideal des Körpers (K, H), so ist

$$\theta^p \equiv \theta \pmod{\mathfrak{P}} \tag{2.}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade ist. Es ist aber nach (1.) und nach dem *Fermat*schen Lehrsatz:

$$\theta^p \equiv a\xi^p + b\eta^p \pmod{\mathfrak{P}}, \tag{3.}$$

und dies ist dann und nur dann kongruent mit θ, wenn $\xi^p \equiv \xi$, $\eta^p \equiv \eta \pmod{\mathfrak{P}}$ ist. Folglich genügt auch der Körper (K, H) den Bedingungen 2., 3., 4., § 5, und sein Grad ist daher auch gleich h. Daraus folgt aber, daß K mit H identisch ist.

Über das *Dirichlet*sche Prinzip.*)

Von Herrn *David Hilbert* in Göttingen.

Das *Dirichlet*sche Prinzip ist eine Schlußweise, welche *Dirichlet* — durch einen Gedanken von *Gauß* veranlaßt — zur Lösung der sogenannten Randwertaufgabe angewandt hat, und die sich kurz wie folgt charakterisieren läßt. Man errichte auf der xy-Ebene in den Punkten der gegebenen Randkurve Lote und trage auf diesen die betreffenden Randwerte ab. Unter den Flächen $z = f(x, y)$, die von der so entstehenden Raumkurve berandet sind, denke man sich eine solche Fläche ausgesucht, für welche der Wert des Integrals

*) Abdruck eines Vortrages aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII, 1900. Meine hier skizzierten Methoden sind seitdem für einfache Integrale in der Inauguraldissertation von *Ch. A. Noble* (Eine neue Methode in der Variationsrechnung, Göttingen 1901) und für gewisse Fälle von Doppelintegralen in der Inauguraldissertation von *E. R. Hedrik* (Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen, Göttingen 1901) ausgeführt worden. Für den Fall des einfachen Integrals vgl. noch die wohldurchdachte Darstellung meiner Methode in dem vor kurzem erschienenen Werke von *O. Bolza* (Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904) sowie eine künftig in den Mathematischen Annalen erscheinende Abhandlung von *C. Carathéodory*, in der eine wesentliche Ausdehnung der Gültigkeit meiner Methode dargelegt werden wird.

Ein von der obigen Methode verschiedenes dem *Dirichlet*schen Prinzipe nachgebildetes Verfahren zur Lösung der Randwertaufgabe in der Potentialtheorie habe ich in der Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901 (abgedruckt in den Mathematischen Annalen Bd. 59) dargelegt. Vgl. endlich die soeben erschienene Abhandlung von *M. Mason*, Journal de Mathématiques 1904 t. X, in der der Verfasser das in seiner Göttinger Dissertation nach meinen Angaben dargelegte Verfahren zum Nachweis der Existenz einer Minimalfunktion auf den Fall zweier unabhängigen Veränderlichen überträgt.

$$J(f) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

ein Minimum ist. Diese Fläche ist, wie man leicht vermöge der Variationsrechnung zeigt, notwendig eine Potentialfläche. Mit dem Hinweise auf eine Betrachtung solcher Art hat *Riemann* den Beweis der Existenz der Lösung der Randwertaufgabe für erledigt gehalten und dann unbedenklich seine großartige Theorie der *Abel*schen Funktionen hierauf begründet.

Es ist zuerst von *Weierstraß* erkannt worden, daß die hier angewandte Schlußweise des *Dirichlet*schen Prinzips nicht stichhaltig ist: in der Tat, wäre nur eine endliche Anzahl von Zahlwerten vorgelegt, so dürften wir ohne weiteres schließen, daß es unter ihnen einen kleinsten Zahlwert gibt; unter einer unbegrenzten Anzahl von Zahlwerten jedoch braucht ein kleinster Zahlwert nicht notwendig vorhanden zu sein; es bedarf vielmehr eines besonderen Beweises, daß in dem erörterten Falle tatsächlich eine Fläche $z = f(x, y)$ existiert, für welche der zugehörige Integralwert $J(f)$ ein kleinster ist.

Die wichtigen Untersuchungen von *C. Neumann*, *H. A. Schwarz* und *H. Poincaré* haben gezeigt, daß unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der Randkurve und der Randwerte die Randwertaufgabe gewiß lösbar ist, und dadurch ist auf dem umgekehrten Wege die Existenz jener Minimalfunktion $f(x, y)$ sichergestellt.

Das *Dirichlet*sche Prinzip verdankte seinen Ruhm der anziehenden Einfachheit seiner mathematischen Grundidee, dem unleugbaren Reichtum der möglichen Anwendungen auf reine und physikalische Mathematik und der ihm innewohnenden Überzeugungskraft. Aber seit der *Weierstraß*schen Kritik fand das *Dirichlet*sche Prinzip nur noch historische Würdigung und erschien jedenfalls als Mittel zur Lösung der Randwertaufgabe abgetan. Bedauernd spricht *C. Neumann* aus, daß das so schöne und dereinst so viel benutzte *Dirichlet*sche Prinzip jetzt wohl für immer dahingesunken sei; nur *A. Brill* und *M. Noether* rufen neue Hoffnung in uns wach, indem sie der Überzeugung Ausdruck geben, daß das *Dirichlet*sche Prinzip, gewissermaßen der Natur nachgebildet, vielleicht in modifizierter Fassung einmal eine Wiederbelebung erfährt.

Das Folgende ist ein Versuch der Wiederbelebung des *Dirichlet*schen Prinzips.

Indem wir bedenken, daß die *Dirichlet*sche Aufgabe nur eine besondere Aufgabe der Variationsrechnung ist, gelangen wir dazu, das *Dirichlet*sche Prinzip in folgender allgemeinerer Form auszusprechen:

Eine jede reguläre) Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.*

Wie uns dieses Prinzip als Leitstern zur Auffindung von strengen und einfachen Existenzbeweisen dienen kann, zeigen folgende zwei Beispiele:

I. Auf einer gegebenen Fläche $z=f(x,y)$ zwischen zwei gegebenen Punkten P und $P^{(1)}$ die kürzeste Linie zu ziehen.

Es sei l die untere Grenze für die Längen aller Kurven auf der Fläche zwischen den beiden gegebenen Punkten. Aus der Gesamtheit dieser Verbindungskurven suchen wir solche Kurven $C_1, C_2, C_3, \ldots$ aus, deren Längen L_1, bezw. $L_2, L_3, \ldots$ sich der Grenze l nähern. Auf C_1 tragen wir von P aus die Länge $\frac{1}{2}L_1$ ab und erhalten dadurch auf C_1 den Punkt $P_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$; sodann tragen wir von P aus auf C_2 die Länge $\frac{1}{2}L_2$ ab bis $P_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, ferner auf C_3 die Länge $\frac{1}{2}L_3$ bis $P_3^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ usf. Die Punkte $P_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $P_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $P_3^{\left(\frac{1}{2}\right)}, \ldots$ mögen etwa den Punkt $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ als eine Verdichtungsstelle haben, wo $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ wiederum ein Punkt der Fläche $z=f(x,y)$ ist.

Das nämliche Verfahren, welches wir soeben auf die Punkte P und $P^{(1)}$ angewandt haben, und das uns auf einen Punkt $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ führte, wenden wir nunmehr auf die Punkte P und $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ an und gelangen dadurch zu einem Punkte $P^{\left(\frac{1}{4}\right)}$ auf der gegebenen Fläche. Desgleichen erhalten wir einen Punkt $P^{\left(\frac{3}{4}\right)}$ der gegebenen Fläche, wenn wir das genannte Verfahren auf die Punkte $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ und $P^{(1)}$ anwenden. Entsprechend finden wir die Punkte $P^{\left(\frac{1}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{3}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{5}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{7}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{1}{16}\right)}$, ... Diese sämtlichen Punkte und ihre Verdichtungsstellen bilden auf der Fläche $z=f(x,y)$ eine stetige Kurve, welche die gesuchte kürzeste Linie ist.

Der Nachweis für diese Tatsache wird leicht geführt, wenn man die Kurvenlänge als Grenzwert der Längen einbeschriebener Polygonzüge definiert.

---

*) Vgl. meinen auf dem Pariser Kongreß 1900 gehaltenen Vortrag: Mathematische Probleme (Nr. 19) Archiv der Math. u. Phys. R. III sowie die zwei Abhandlungen von *S. Bernstein:* Sur la nature analytique des solution des équations aux dérivées partielles du second ordre Math. Ann. Bd. 59 u. Sur la déformation des surfaces. Math. Ann. Bd. 60.

Wie wir zugleich sehen, genügt für unsere Betrachtung die Annahme, daß die gegebene Funktion $f(x, y)$ nebst dem ersten Differentialquotienten nach x und nach y stetig ist.

II. Eine Potentialfunktion $z = f(x, y)$ zu finden, die auf einer gegebenen Randkurve in der xy-Ebene gegebene Randwerte annimmt.

Der Einfachheit halber setzen wir für die gegebene Randkurve stetige Tangente und Krümmung, und für die Randwerte eine stetige Ableitung voraus. Wir stellen uns nun die zu Anfang dieses Vortrages erwähnte Raumkurve her und bestimmen dann einen festen dieser Raumkurve eigentümlichen Winkel φ von folgender Beschaffenheit: Wenn $z = F(x, y)$ irgend eine analytische oder stückweise analytische Fläche ist, deren Rand durch die Raumkurve gebildet wird, so läßt sich aus $z = F(x, y)$ stets eine Fläche $z = \hat{F}(x, y)$ konstruieren, so daß der zu $z = \hat{F}(x, y)$ gehörige Integralwert $J(\hat{F})$ kleiner oder gleich dem zu $z = F(x, y)$ gehörigen Integralwert $J(F)$ wird, und zugleich $z = \hat{F}(x, y)$ an keiner Stelle eine Tangente besitzt, deren Winkel mit der xy-Ebene größer als φ ausfällt. Man gelangt zu einem solchen Winkel φ, indem man diejenigen Stellen ins Auge faßt, an denen die Stärke des Abfalles der Fläche $z = F(x, y)$ gegen die xy-Ebene (d. h. die Größe $\arctan \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$) eine gewisse Größe überschreitet, und zeigt, daß die Fläche $z = F(x, y)$ in der Umgebung dieser Stellen stets durch ein Stück einer Ebene

$$z = ax + by + c$$

oder (am Rande) durch ein Stück einer trichterförmigen Potentialfläche

$$z = \frac{a(x+\alpha) + b(y+\beta)}{(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2} + c$$

ersetzt werden kann — unter a, b, c, α, β solche Konstante verstanden, daß die Ebene bezw. die Tangenten des betreffenden Stückes der trichterförmigen Potentialfläche gegen die xy-Ebene weniger steil geneigt sind.

Es sei i die untere Grenze der Integralwerte J für alle Flächen, deren Rand durch die gegebene Raumkurve gebildet wird. Aus der Gesamtheit dieser Flächen suchen wir solche Flächen

$$z = F_1(x, y), \quad z = F_2(x, y), \quad z = F_3(x, y) \ldots$$

aus, deren zugehörige Integralwerte

$$J_1 = J(F_1), \qquad J_2 = J(F_2), \qquad J_3 = J(F_3), \ldots$$

sich der Grenze i nähern. Wir ersetzen dann jede der Flächen

$$z = F_1, \quad z = F_2, \quad z = F_3, \ldots$$

bezw. durch solche Flächen

$$z = \hat{F}_1, \quad z = \hat{F}_2, \quad z = \hat{F}_3, \ldots,$$

die an keiner Stelle eine Tangente besitzen, deren Winkel mit der xy-Ebene größer als φ ausfällt.

Nunmehr suchen wir aus der unendlichen Reihe der Funktionen $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3, \ldots$ eine solche Reihe von Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ aus, daß der Grenzwert

$$\underset{n=\infty}{L} (f_n(x, y)$$

für alle diejenigen Punkte x, y innerhalb der gegebenen ebenen Randkurve existiert, deren Koordinaten x, y rationale Zahlen sind. Da andererseits für sämtliche Punkte innerhalb der Randkurve

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right| < \operatorname{tang}\varphi, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right| < \operatorname{tang}\varphi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ausfällt, so folgt leicht, daß die unendliche Reihe von Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ für das Innere der Kurve einschließlich des Randes gleichmäßig konvergiert, d. h. es ist

$$f(x, y) = \underset{n=\infty}{L} f_n(x, y)$$

eine stetige Funktion der Veränderlichen x, y.

Die Fläche $z = f(x, y)$ ist die gesuchte Potentialfläche. Der Nachweis hierfür bietet keine Schwierigkeit; er gelingt am einfachsten, wenn wir die Existenz der Minimalfunktion, d. h. die Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis und eine beliebige stetige Randfunktion benutzen; doch läßt sich der Nachweis auch auf direktem Wege erbringen.

Neben der Einfachheit und Durchsichtigkeit des eben kurz gekennzeichneten Schlußverfahrens erblicke ich den Hauptvorteil der neuen Methode darin, daß sie nur die Minimums-Eigenschaft benutzt und von der speziellen Natur der Aufgabe, d. h. von den besonderen Eigenschaften der geodätischen Linie bezw. der Potentialfunktion keinen Gebrauch macht; das Schlußverfahren ist daher auch auf allgemeinere Probleme der Flächentheorie und der mathematischen Physik anwendbar.

Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten.

Von Herrn *K. Hensel.*

Gauß hat zuerst streng bewiesen, daß jede Funktion n-ten Grades $f(x)$ auf eine einzige Weise in irreduktible reelle Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden kann. Ist

$$(1.) \qquad f(x) = f(x)\, f_2(x) \ldots f_h(x)$$

jene Zerlegung, so ist h die Gesamtzahl aller reellen und der Paare konjugierter imaginärer Wurzeln, welche *G. Lejeune Dirichlet* in einer seiner kürzesten und bewunderungswertesten Abhandlungen „Zur Theorie der komplexen Einheiten“*) eingeführt und durch sie die Anzahl der Fundamentaleinheiten in dem durch die Gleichung $f(x)=0$ definierten Körper $K(x)$ ausgedrückt hat.

Es ist nun eine merkwürdige und wohl noch nicht genügend beachtete Tatsache, daß dieses letzte *Dirichlet*sche Resultat und der aus ihm sich ergebende Satz über die multiplikative Darstellung aller Zahlen des Körpers $K(x)$ durch ein Fundamentalsystem von nur h Elementen so verallgemeinert werden kann, daß aus ihm sowohl die Theorie der Einheiten als auch die Theorie der idealen Zahlen hervorgeht.

Es besteht nämlich der dem oben erwähnten *Gauß*schen Fundamentaltheoreme vollständig koordinierte Satz, daß jede ganzzahlige Funktion n-ten Grades nicht bloß im Gebiete der rationalen und irrationalen reellen Zahlen,

---

*) Verhandlungen der Berliner Akademie v. J. 1846, S. 103—107, Werke Bd. I, S. 641—644.

sondern auch für den Bereich einer beliebigen Primzahl p auf eine einzige Weise in irreduktible Faktoren zerlegt werden kann. Diesen Satz habe ich in der Abhandlung „Neue Grundlagen der Arithmetik“ d. Journ., Bd. 127, S. 51—82*) ausgesprochen und bewiesen.

Ist nun

$$(1^{a}.) \qquad f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \dots f_h(x) \qquad (p)$$

jene Zerlegung für den Bereich von p, so zeigt man wörtlich ebenso wie bei dem vorher betrachteten Falle, daß jede ganze oder gebrochene algebraische Zahl η des Körpers $K(x)$ nebst allen ihren konjugierten auf eine einzige Weise multiplikativ durch nur h geeignet gewählte Zahlen $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_h)$, d. h. in der Form:

$$\eta = \varepsilon\, \eta_1^{m_1}\, \eta_2^{m_2} \dots \eta_h^{m_h}$$

dargestellt werden kann, wo ε eine „Einheit für p“ ist und die Exponenten m_i positive oder negative Zahlen bedeuten. Geht man von einem solchen Fundamentalsystem zu einem äquivalenten „reduzierten“ $(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_h)$ über, so werden für dieses die Exponenten m_i ganze Zahlen und die Elemente π_i die zu p gehörigen Primdivisoren im weitesten Sinne. Die Primzahl p besitzt also auch in diesem Falle genau h verschiedene Primteiler π_i, welche den h irreduktiblen Faktoren $f_i(x)$ in $(1^{a}.)$ eindeutig zugeordnet sind. Sind allgemein e_i und f_i die Ordnungszahl und der Grad von π_i und ist n_i der Grad des zugehörigen Faktors $f_i(x)$, so ist stets

$$n_i = e_i f_i.$$

So ergibt sich die Theorie der idealen Primfaktoren und die der Einheiten als Spezialfälle einer und derselben allgemeinen Betrachtung, und zwar stehen sie in genau derselben Beziehung zu einander, wie die Untersuchung der algebraischen Funktionen einer Variablen in der Umgebung einer endlichen Stelle und dieselbe Betrachtung für die unendlich ferne Stelle. Ebenso wie dort können auch hier beide Fragen gemeinsam untersucht und erst dann jene beiden Theorieen durch Spezialisierung gewonnen werden.**)

---

*) Vergl. außerdem meinen Aufsatz: „Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen“. Math. Ann. Bd. 55, S. 301—336.

**) Diese Untersuchung habe ich in einer im Jahre 1902 in Berlin gehaltenen Vorlesung vollständig durchgeführt.

Die hier charakterisierte neue Theorie der algebraischen Zahlen, deren Elemente ich in einer in diesem Journale (Bd. 128, S. 1—32) veröffentlichten Abhandlung entwickelt habe, scheint mir auch aus dem Grunde ein brauchbares Hilfsmittel für arithmetische Untersuchungen zu sein, weil mit ihrer Hilfe Fragen der Zahlentheorie vollständig und einfach gelöst werden können, deren Beantwortung mit den bisherigen Methoden entweder überhaupt nicht gelang, oder doch bedeutende Schwierigkeiten bereitete.

In der folgenden Abhandlung behandle ich eine dieser Aufgaben; sie ist eine Verallgemeinerung eines elementaren Satzes, welcher bei der *Dirichlet*schen Behandlung der Theorie der Einheiten auftritt; nur aus diesem Grunde wage ich es, diese kurze Untersuchung in dem vorliegenden, dem Gedächtnisse dieses großen Mathematikers gewidmeten Bande zu veröffentlichen.

§ 1.

Es sei wie vorher

$$(1^{b}.) \qquad f(x)=0$$

eine beliebige irreduktible ganzzahlige Gleichung n-ten Grades, $K(x)$ einer der n durch sie konstituierten konjugierten Körper, und D die Diskriminante irgend einer zu $K(x)$ gehörigen Basis, z. B. die Diskriminante der Gleichung $(1^{b}.)$. Da sich jede andere Basisdiskriminante bekanntlich nur um das Quadrat einer rationalen Zahl von D unterscheidet, so haben alle zu $K(x)$ gehörigen Diskriminanten ein und dasselbe Vorzeichen; dieses ist also eine Invariante des Körpers $K(x)$.

Eine ganz elementare Untersuchung der in (1.) angegebenen Zerlegung von $f(x)$ in seine h irreduktiblen reellen Faktoren ersten und zweiten Grades ergibt nun den Satz:

> Die Basisdiskriminanten eines Körpers $K(x)$ sind sämtlich positiv oder sämtlich negativ, je nachdem $n-h$ gerade oder ungerade ist, d. h. es ist
>
> $$(2.) \qquad \operatorname{sgn} D=(-1)^{n-h}.$$

Es sei nun p eine beliebige Primzahl und

$$(3.) \qquad D=p^{\delta}D_0,$$

wo p^{δ} die höchste in D enthaltene Potenz von p bedeutet, D_0 also p nicht

mehr enthält. Ist nun

$$(3^a.) \qquad \overline{D} = p^{\overline{\delta}} \cdot \overline{D}_0$$

irgend eine andere Basisdiskriminante desselben Körpers, welche sich also von D nur um das Quadrat einer rationalen Zahl unterscheidet, so bestehen die beiden Beziehungen:

$$(4.) \qquad \begin{cases} \overline{\delta} \equiv \delta \pmod 2 \\ \left(\frac{\overline{D}_0}{p}\right) = \left(\frac{D_0}{p}\right). \end{cases}$$

Die Diskriminanten D eines und desselben Zahlkörpers enthalten somit entweder alle eine gerade oder alle eine ungerade Potenz einer beliebigen Primzahl p, und ihre primitiven Teile D_0 sind entweder sämtlich quadratische Reste oder sämtlich quadratische Nichtreste von p.

Für den einfachsten Fall, daß die Primzahl p nicht in der Körperdiskriminante enthalten ist, wurde die Bestimmung des quadratischen Charakters jener Diskriminante in bezug auf p durch einen einfachen und eleganten Satz gegeben, welchen Herr *Stickelberger* auf dem ersten internationalen Kongresse in Zürich vorgetragen hat.*) Der Beweis für den Fall, daß $p = 2$ ist, macht aber hier besondere und nicht ganz einfache Hilfsbetrachtungen notwendig. Denselben speziellen Fall aber nur für eine ungerade Primzahl hat dann Herr *Voronoï* ohne Kenntnis der *Stickelberger*schen Arbeit 1904 in einem Vortrage bei dem dritten internationalen Kongresse zu Heidelberg auf einem anderen Wege bewiesen.

Die Bestimmung der beiden Invarianten (4.) für einen beliebigen Körper $K(x)$ und eine beliebige Primzahl p ist dagegen eine Aufgabe, welche mit den früheren Hilfsmitteln der Idealtheorie nicht allgemein gelöst werden konnte. Die Lösung ergibt sich aber höchst einfach, wenn man von der in der Einleitung erwähnten Theorie der algebraischen Zahlen ausgeht. Im folgenden sollen jene beiden Invarianten für eine beliebige Primzahl p vollständig bestimmt werden und zwar so, daß der singuläre Fall $p = 2$ keine Spezialuntersuchung nötig macht.

Zunächst können und wollen wir die Grundgleichung $f(x)$ als unzerlegbar für den Bereich von p voraussetzen.

---

*) Verh. des internat. Kongresses in Zürich 1897. S. 182—193.

Angenommen nämlich, $f(x)$ zerfalle für den Bereich von p in h irreduktible Faktoren, und es sei wie in Nr. (1ª):

$$(5.) \qquad f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \dots f_h(x) \qquad (p)$$

diese Zerlegung. Dann besteht bekanntlich für die Gleichungsdiskriminante die Identität:

$$(5^a.) \qquad D(f) = \prod_{i=1}^{h} D(f_i) \prod_{i \gtrless k} R^2(f_i(x), f_k(x)) \qquad (p),$$

wo allgemein $R(f_i(x), f_k(x))$ die Eliminationsresultante von $f_i(x)$ und $f_k(x)$ bedeutet. Da sich somit

$$D(f) \qquad \text{von} \qquad \prod_i D(f_i)$$

nur um ein rationales Quadrat unterscheidet, so bestehen für die zugehörigen Invarianten δ und δ_i einerseits und $\left(\frac{D_0}{p}\right)$ und $\left(\frac{D_0^{(i)}}{p}\right)$ andererseits die Beziehungen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \delta \equiv \sum_{i=1}^{h} \delta_i \pmod 2, \\ \left(\frac{D_0}{p}\right) = \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{D_0^{(i)}}{p}\right). \text{*)} \end{cases}$$

Es sei also jetzt die Grundgleichung n-ten Grades auch für den Bereich der Primzahl p irreduktibel. Dann besitzt die Gleichung

$$(7.) \qquad f(x) = 0 \qquad (p)$$

für den Bereich von p genau n Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$; diese lassen sich auf eine einzige Art in konjugierte Potenzreihen entwickeln, welche im allgemeinen nach *ganzen* Potenzen von p fortschreiten. Nur dann, wenn p in der Diskriminante des durch (7.) konstituierten Körpers $K(x)$ enthalten ist, schreiten jene n Reihen nach ganzen Potenzen einer gewissen e-ten Wurzel π aus p fort, genau ebenso, wie die Wurzeln y_i einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ in der Umgebung eines e-blättrigen Verzweigungspunktes $x = \alpha$ nach ganzen Potenzen von $\pi = (x - \alpha)^{\frac{1}{e}}$ entwickelbar sind. Daher soll auch in diesem Falle p eine *Verzweigungszahl für den Körper* $K(x)$ genannt werden, und e soll die Verzweigungsordnung von p in bezug auf $K(x)$

*) Wendet man genau dieselben einfachen Überlegungen auf die Zerlegung (1.) von $f(x)$ a. S. 68 an, so erhält man unmittelbar den Beweis der Gleichung (2.).

heißen. Die Zahl e ist stets ein Teiler von n, so daß wie bereits a. S. 69 erwähnt wurde:

(8.) $$ef = n$$

ist.

Es werde nun gleich die allgemeinste Annahme gemacht, daß p eine Verzweigungszahl für $K(x)$ ist, deren Verzweigungsordnung e ist, und es sei π diejenige e-te Wurzel aus p, nach deren Potenzen sich die eine der n Wurzeln der Gleichung (7.) entwickeln läßt. Dann gilt für diese Wurzel x die folgende Gleichung:

(9.) $$x = \varepsilon^{(\varrho)}\pi^{\varrho} + \varepsilon^{(\varrho+1)}\pi^{\varrho+1} + \cdots \qquad (p).$$

Die Koeffizienten $\varepsilon^{(\varrho)}, \varepsilon^{(\varrho+1)}, \ldots$ sind dann eindeutig bestimmte modulo p reduzierte ganze algebraische Zahlen eines und desselben Körpers $K(\varepsilon)$ vom f-ten Grade, welchen ich *den zu der Gleichung* (7.) *gehörigen Koeffizientenkörper* nenne. Die Grundzahl ε von $K(\varepsilon)$ ist eine der f konjugierten Wurzeln einer für den Bereich von p irreduktiblen Gleichung f-ten Grades:

(10.) $$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{f} - g_{f-1}\varepsilon^{f-1} + g_{f-2}\varepsilon^{f-2} - \cdots \pm g_0 = 0 \qquad (p),$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen des rationalen Körpers $K(p, 1)$ sind, und deren linke Seite einer der für den Bereich von p irreduktiblen Faktoren f-ten Grades der Funktion:

(10ª.) $$\varepsilon^{p^f} - \varepsilon$$

ist. Hieraus folgt, daß die f Wurzeln

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{f-1}$$

von (10.) den f Potenzen

$$\varepsilon,\ \varepsilon^{p},\ \varepsilon^{p^2}, \ldots \varepsilon^{p^{f-1}}$$

bezw. gleich sind, während

$$\varepsilon^{p^f} = \varepsilon$$

ist. Die irreduktible Gleichung (10.) ist somit eine *Abel*sche, und eine rationale Funktion ihrer Wurzeln ist dann und nur dann rational, wenn sie bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln $(\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{f-1})$ in dieser Reihenfolge ungeändert bleibt.

Die Entwicklungszahl π ist im allgemeinen eine *reine* e-te Wurzel aus p; sie genügt nämlich einer reinen Gleichung e-ten Grades:

(11.) $$\psi(\pi) = \pi^{e} + (-1)^{e} p\gamma_0 = 0;$$

hier kann aber γ_0 eine durch p nicht teilbare Zahl des Koeffizientenkörpers $K(\varepsilon)$ sein, welche durch veränderte Wahl von π innerhalb $K(x)$ zwar verändert, aber nicht beseitigt werden kann. In diesem Falle besitzt also π für jeden Wert ε_i von ε genau e von einander verschiedene Wurzeln

$$\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots \pi_{ie},$$

welche durch die aus (11.) folgenden Gleichungen

$$\pi_{ik} = -\varrho^{k-1} \sqrt[e]{p\gamma_0^{(i)}} \qquad (i = 1, 2, \dots e)$$

bestimmt sind, wo $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{e}}$ und $\gamma_0^{(i)}$ der Wert von γ_0 für $\varepsilon_i = \varepsilon^{p^{i-1}}$ ist. Ersetzt man also ε durch seine f konjugierten Werte, so erhält man für die Entwicklungszahl π genau $ef = n$ konjugierte Werte, welche sich nur um die Einheiten $\varrho^{k-1}(\gamma_0^{(i)})^{\frac{1}{e}}$ von einander und von $p^{\frac{1}{e}}$ unterscheiden. Man erhält alle n Wurzeln der Gleichung (7.), wenn man in der Potenzreihe (9.) für x dem ε alle Werte $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{f-1}$ beilegt und bei jedem ε_i der Entwicklungszahl π die e zugehörigen konjugierten Werte $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots \pi_{ie}$ gibt.

Der bisher geschilderte Fall tritt stets ein, wenn die Verzweigungsordnung e von p nicht durch diese Primzahl selbst teilbar ist. Der bisher ausgeschlossene Fall, wo e eine beliebig hohe Potenz von p als Faktor enthält, bot früher der höheren Arithmetik überhaupt unüberwindliche Schwierigkeiten. Bei der hier benutzten Methode unterscheidet er sich aber von dem regulären Falle nur dadurch, daß hier die als Entwicklungszahl π auftretende e-te Wurzel aus p nicht durch eine reine Gleichung (11.) definiert ist, sondern die Wurzel einer gemischten Gleichung e-ten Grades:

$$(11^{\text{a}}.) \qquad \psi(\pi) = \pi^e - p\gamma_{e-1}\pi^{e-1} + p\gamma_{e-2}\pi^{e-2} - \dots + (-1)^e p\gamma_0 = 0$$

sein kann, deren Koeffizienten $p\gamma_i$, durch p teilbare ganze Zahlen des Koeffizientenkörpers $K(\varepsilon)$ sind, in der aber das letzte Glied $p\gamma_0$ sicher nur durch die erste Potenz von p teilbar ist. Auch hier gehört zu jedem der f konjugierten Werte ε_i von ε je eine Gleichung:

$$(11^{\text{b}}.) \quad \psi_i(\pi) = \pi^e - p\gamma_{e-1}^{(i)}\pi^{e-1} + \dots \pm p\gamma_0^{(i)} = (\pi - \pi_{i1})(\pi - \pi_{i2}) \dots (\pi - \pi_{ie}),$$

welche sich ebenfalls von einander und von $p^{\frac{1}{e}}$ nur um algebraische Einheiten unterscheiden, und alle vorher für den regulären Fall angegebenen Resultate bleiben somit auch hier unverändert gültig.

Um nun die beiden Invarianten (4.) zu bestimmen, betrachte ich die Diskriminante $D(\xi)$, welche zu einer möglichst günstig gewählten algebraischen Zahl ξ von $K(x)$ gehört Es sei

$$\xi = \varepsilon + \pi,$$

wo ε die Grundzahl des Koeffizientenkörpers $K(\varepsilon)$ und π die Entwicklungszahl für den Körper $K(x)$ bedeutet. Dann ist $D(\xi)$ das Differenzenprodukt der $ef = n$ konjugierten algebraischen Zahlen:

$$(12.) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 + \pi_{11}, \ \varepsilon_1 + \pi_{12}, \ \dots \ \varepsilon_1 + \pi_{1e}, \\ \varepsilon_2 + \pi_{21}, \ \varepsilon_2 + \pi_{22}, \ \dots \ \varepsilon_2 + \pi_{2e}, \\ \vdots \\ \varepsilon_f + \pi_{f1}, \ \varepsilon_f + \pi_{f2}, \dots \varepsilon_f + \pi_{fe}. \end{cases}$$

Das Differenzenprodukt der e in einer und derselben, etwa der i-ten Zeile stehenden Wurzeln ist nun zunächst gleich

$$\prod_{g>k} (\pi_{ig} - \pi_{ik})^2 = D(\pi_{i1}, \dots \pi_{ie}) = D(\psi_i(\pi)),$$

d. h. gleich der Diskriminante der Gleichung $\psi_i(\pi) = 0$ in (11^b.). Dagegen beginnt jede Differenz

$$(\varepsilon_i + \pi_{ik}) - (\varepsilon_{i'} + \pi_{i'k'}) = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i'}) + (\pi_{ik} - \pi_{i'k'})$$

von einer der e Wurzeln der i-ten Zeile und einer der e Wurzeln der i'-ten Zeile immer mit $\varepsilon_i - \varepsilon_{i'}$; das Produkt aller Wurzeldifferenzen, deren Minuendus und Subtrahendus verschiedenen Zeilen angehören, beginnt also mit

$$\{ \Pi (\varepsilon_i - \varepsilon_{i'})^2 \}^{e^2} = D(\varepsilon)^{e^2},$$

wenn $D(\varepsilon)$ die Diskriminante der Gleichung $\varphi(\varepsilon) = 0$ in (10.) bedeutet.

Also ergibt sich für die Entwicklung der Diskriminante $D(\xi)$ nach steigenden Potenzen von p die Gleichung

$$D(\xi) = D(\varepsilon)^{e^2} \prod_{i=1}^{e} D(\psi_i(\pi)) + \cdots$$

$$= D(\varepsilon)^{e^2} N_\varepsilon D(\psi(\pi)) + \cdots .$$

Beachtet man noch, daß für die Diskriminante irgend einer Gleichung $\psi(\pi) = 0$ vom e-ten Grade

$$D(\psi(\pi)) = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi(\psi'(\pi))$$

ist, so ergibt sich endlich die folgende Entwicklung der Gleichungsdiskriminante $D(\xi)$:

$$(13.) \qquad D(\xi) = D(\varepsilon)^e \cdot N_\varepsilon\Big((-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi(\psi'(\pi))\Big) + \cdots .$$

Fast ebenso einfach erhält man eine vollständige Darstellung der Körperdiskriminante $D(K(x))$ von $K(x)$ und nicht bloß eine Darstellung ihres Anfangsgliedes, wenn man beachtet, daß die $ef = n$ Zahlen

$$1, \varepsilon, \ldots \varepsilon^{f-1}, \pi, \pi\varepsilon, \ldots \pi\varepsilon^{f-1}, \ldots \pi^{e-1}, \pi^{e-1}\varepsilon, \ldots \pi^{e-1}\varepsilon^{f-1}$$

offenbar ein Fundamentalsystem für diesen Körper bilden, und daß daher die aus ihnen und ihren konjugierten gebildete Determinante der Quadratwurzel aus $D(K(x))$ gleich ist. Durch eine sehr einfache Umformung jener Determinante ergibt sich so die Gleichung:

$$(13^a.) \qquad \begin{cases} D(K(x)) = D(\varepsilon)^e \cdot \prod_{i=1}^{e} D(\psi_i(\pi)) \\ \qquad\qquad = D(\varepsilon)^e \cdot N_\varepsilon\Big((-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi(\psi'(\pi))\Big), \end{cases}$$

und wir erkennen so beiläufig, daß die Körperdiskriminante $D(K(x))$ und die vorher betrachtete spezielle Gleichungsdiskriminante $D(\xi)$ dieselbe Potenz von p enthalten, nämlich diejenige, welche in dem Produkte $\Pi D(\psi_i(\pi))$ auftritt. Im folgenden will ich daher jetzt die Darstellung (13ª.) der Körperdiskriminante zur Bestimmung jener beiden Invarianten benutzen.

Um nun $D(K(x))$ mit Hilfe von (13ª.) wirklich zu berechnen, bilde ich die Ableitung der Funktion $\psi(\pi)$ in (11ª.)

$$\psi'(\pi) = e\pi^{e-1} - (e-1)p\gamma_{e-1}\pi^{e-1} + \cdots \pm ip\gamma_i\pi^{i-1} \mp \cdots \pm p\gamma_1$$

und entwickle sie nach steigenden Potenzen von π. Die e einzelnen Glieder von $\psi'(\pi)$ sind alle von verschiedener Ordnungszahl in bezug auf p, da sie, abgesehen von ganzzahligen Potenzen dieser Primzahl bezw. mit π^{e-1}, $\pi^{e-2}, \ldots \pi$, 1 d. h. mit den gebrochenen Potenzen $p^{\frac{e-1}{e}}, \ldots p^{\frac{1}{e}}$, 1 multipliziert sind. Daher können sich in keinem Falle zwei dieser Glieder fortheben. Schreibt man also die Entwicklung von $\psi'(\pi)$ in der Form:

$$(14.) \qquad \psi'(\pi) = c_{\bar{e}-1}\pi^{\bar{e}-1} + c_{\bar{e}}\pi^e + \cdots,$$

so ist das Anfangsglied $c_{e-1}\pi^{\bar{e}-1}$ einfach das Glied niedrigster Ordnung

$$\pm ip\gamma_i\pi^{i-1}$$

in $\psi'(\pi)$, welches in jedem Falle unmittelbar angegeben werden kann. Ist e durch p nicht teilbar, also $\psi(\pi)=\pi^e+(-1)^e p\gamma_0$, so ist:

$$(14^a.) \qquad \psi'(\pi)=c_{e-1}^{-}\pi^{\bar{e}-1}+\cdots=e\pi^{e-1},$$

also in diesem regulären Falle ist einfach:

$$(15.) \qquad \bar{e}=e, \quad c_{e-1}^{-}=e.$$

Bildet man nun die Norm von $\psi'(\pi)$ in (14.) und beachtet dabei, daß

$$N_\pi(\pi)=p\gamma_0$$

ist, so ergibt sich zunächst:

$$(16.) \qquad (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi(\psi'(\pi))=(-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} c_{e-1}^{e}\gamma_0^{\bar{e}-1}p^{\bar{e}-1}+\cdots=\bar{\gamma}_0\cdot p^{\bar{e}-1}+\cdots,$$

wo $\bar{\gamma}_0$ eine p nicht enthaltende Zahl des Körpers $K(\varepsilon)$ ist, welche durch die Gleichung:

$$(16^a.) \qquad \bar{\gamma}_0=(-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} c_{e-1}^{e}\gamma_0^{\bar{e}-1}$$

definiert ist. In dem regulären Falle ist nach (15.):

$$(16^b.) \qquad \bar{\gamma}_0=(-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e\gamma_0^{e-1}.$$

Substituiert man diesen Wert endlich in (13ª.), so ergibt sich:

$$(17.) \qquad D(K(x))=p^\delta D_0=p^{f(\bar{e}-1)}D(\varepsilon)^e(N_\varepsilon(\bar{\gamma}_0)+\cdots),$$

und man erhält so die folgende Darstellung jener beiden Invarianten:

$$(18.) \qquad \begin{cases} \delta=f(\bar{e}-1), \\ \left(\frac{D_0}{p}\right)=\left(\frac{D(\varepsilon)}{p}\right)^e\cdot\left(\frac{N_\varepsilon(\bar{\gamma}_0)+\cdots}{p}\right). \end{cases}$$

§ 2.

Um die Einfachheit des im vorigen Abschnitte gefundenen allgemeinen Resultates deutlicher hervortreten zu lassen, betrachte ich die einzelnen Fälle desselben gesondert.

Ich nehme zuerst an, daß p kein Teiler der Körperdiskriminante von $K(x)$ ist. Dann ist $\pi=p$, also

$$e=1, \quad f=n;$$

es wird hier also einfach

$$D(K(x)) = D(\varepsilon) = D_0.$$

Die Gleichungsdiskriminante $D(\varepsilon)$ ist nun quadratischer Rest oder Nichtrest zu p, je nachdem sie für den Bereich dieser Primzahl einem rationalen Quadrate gleich ist oder nicht, je nachdem also ihre Quadratwurzel

$$\sqrt{D(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots 1 \\ \varepsilon, & \varepsilon_1, & \dots \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon^2, & \varepsilon_1^2, & \dots \varepsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & & \\ \varepsilon^{n-1}, & \varepsilon_1^{n-1}, & \dots \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

rational ist oder nicht. Nach der oben a. S. 73 gemachten Bemerkung ist aber eine rationale Funktion von $(\varepsilon, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n-1})$ dann und nur dann eine rationale Zahlgröße für den Bereich von p, wenn sie bei einer zyklischen Permutation jener n Wurzeln ungeändert bleibt; und da sich bei dieser Vertauschung $\sqrt{D(\varepsilon)}$ offenbar mit $(-1)^{n-1}$ multipliziert, so ergibt sich sofort der Satz:

> Ist $f(x)$ für den Bereich von p irreduktibel, und ist p kein Diskriminantenteiler des zugehörigen Körpers $K(x)$, so ist die Diskriminante einer jeden Gleichung dieses Körpers quadratischer Rest oder Nichtrest zu p, je nachdem n ungerade oder gerade ist; es ist also stets:

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{n-1}. \tag{19.}$$

Dieser Fall tritt z. B. stets dann ein, wenn $f(x)$ nicht bloß für den Bereich von p, sondern auch modulo p irreduktibel ist, denn dann ist ja p sicher kein Teiler der Gleichungsdiskriminante von $f(x)$.

Nimmt man allgemeiner $f(x)$ als reduktibel für den Bereich von p an, setzt aber auch jetzt voraus, daß p kein Teiler der Körperdiskriminante ist, und sei dann (5.) die Zerlegung von $f(x)$ für den Bereich von p, so ergibt sich leicht (vgl. § 8 der a. S. 69 genannten Abhandlung), daß auch die h Körperdiskriminanten $D^{(i)}$ die Primzahhl p nicht enthalten. Aus der zweiten Gleichung in (6.) und aus (19.) ergibt sich somit in diesem Falle die Gleichung:

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{D_i}{p}\right) = (-1)^{n-h}. \tag{19a.}$$

Ist also p kein Diskriminantenteiler des Körpers n-ter Ordnung $K(x)$ und zerfällt die Grundgleichung für den Bereich von p in h irreduktible Faktoren, so ist D Rest oder Nichtrest für p, je nachdem $n-h$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

In die Sprache der Idealtheorie übertragen, besagt die bisher gemachte Voraussetzung, daß die Primzahl p lauter verschiedene Primfaktoren innerhalb $K(x)$ besitzt.

Der hier bewiesene Satz gilt auch in dem Falle, daß p die gerade Primzahl 2 ist; nur muß alsdann das Zeichen $\left(\frac{D}{2}\right)$ etwas anders, nämlich durch die Gleichung:

$$\left(\frac{D}{2}\right) = i^{\frac{D-1}{2}} = (-1)^{\frac{D-1}{4}} \tag{20.}$$

definiert werden. Ist nämlich D für den Bereich von 2 einem Quadrate gleich, so muß bekanntlich D die Form $8\nu+1$ haben, und nur dann ist auch $\left(\frac{D}{2}\right)=+1$. Ist dagegen $D=8\nu+5$, so ist nach unserer Definition $\left(\frac{D}{2}\right)=-1$, während dieses Symbol den imaginären Wert $+i$ oder $-i$ haben würde, wenn D die Form $8\nu+3$ oder $8\nu+7$ hätte. Sind die beiden Zahlen D und D' oder auch nur eine von ihnen primär, d. h. von der Form $4\nu+1$, so gilt offenbar auch in diesem Falle die Gleichung $\left(\frac{D\,D'}{2}\right)=\left(\frac{D}{2}\right)\left(\frac{D'}{2}\right)$. Bei dieser Definition des *Legendre*schen Symbols besteht nun ebenfalls die Gleichung:

$$\left(\frac{D}{2}\right) = (-1)^{n-1}, \tag{21.}$$

d. h. ist $f(x)$ für den Bereich der Primzahl 2 irreduktibel und ist 2 nicht in der Körperdiskriminante enthalten, so ist jede Diskriminante dieses Körpers von der Form $8\nu+1$ oder $8\nu+5$, je nachdem der Grad jenes Körpers ungerade oder gerade ist. Es gibt keine Diskriminante von der Form $8\nu+3$ oder $8\nu+7$.

Daß zunächst jede Diskriminante $D(\varepsilon)$ von der Form $4\nu+1$ ist, beweist man leicht folgendermaßen: Erhebt man die Gleichung

$$\sqrt{D} = |\varepsilon^k, \varepsilon_1^k, \ldots \varepsilon_{n-1}^k| \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

zum Quadrate und wendet dann den *Fermat*schen Satz für den Primzahl-

modul 2 an, so ergibt sich die Kongruenz:

$$(\sqrt{D})^2 \equiv |\, \varepsilon^{2k}, \varepsilon_1^{2k}, \ldots \varepsilon_{n-1}^{2k}| \pmod 2.$$

Da aber die Zahlen $\varepsilon^2, \varepsilon_1^2, \ldots \varepsilon_{n-1}^2$ bezw. gleich: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$ sind, so ist die rechts stehende Determinante gleich der vorigen multipliziert mit $(-1)^{n-1}$: und da dieser Faktor modulo 2 fortgelassen werden kann, so besteht die Kongruenz

$$(\sqrt{D})^2 \equiv \sqrt{D} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{D}(\sqrt{D}-1) \equiv 0 \pmod 2;$$

aus ihr folgt ohne weiteres,

$$\sqrt{D} \equiv 1 \pmod 2,$$

das heißt:

$$\sqrt{D} = 1 + 2\gamma,$$

wo γ eine ganze Zahl von $K(\varepsilon)$ ist. Also ist

$$D = 1 + 4\gamma(\gamma+1)$$

oder

$$D \equiv 1 \pmod 4,$$

w. z. b. w.

Ist nun D für den Bereich von 2 einem Quadrate gleich, so muß $\sqrt{D}$ in diesem Bereiche rational sein, und dies ist nach dem soeben für eine beliebige Primzahl p bewiesenen Satze dann und nur dann der Fall, wenn n ungerade ist. Damit ist der vollständige Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (21.) erbracht.

Setzt man endlich in der Gleichung (19ª.) $p=2$, so ergibt sich das folgende allgemeinere Resultat:

> Zerfällt die Primzahl 2 in dem Körper n-ten Grades $K(x)$ in h von einander verschiedene Primfaktoren, so ist die Körperdiskriminante sowie jede Gleichungsdiskriminante von der Form $8r+1$ oder $8r+5$ je nachdem $n-h$ gerade oder ungerade ist.

§ 3.

Es sei jetzt zweitens die Primzahl p ein Verzweigungsteiler von $K(x)$, aber es möge ihre Verzweigungsordnung e den Divisor p nicht enthalten. Setzt man dann in der allgemeinen Gleichung:

$$(22.) \qquad D(x) = D(\varepsilon)^e N_\varepsilon\left((-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi(\psi'(\pi))\right)$$
$$\psi'(\pi) = e\pi^{e-1}$$

und beachtet, daß $N(\pi) = p\gamma_0$ ist, so ergibt sich

$$D(x) = p^\delta D_0 = D(\varepsilon)^e N_\varepsilon(\overline{\gamma}_0) \cdot p^{f(e-1)},$$

wo

$$(23.) \qquad \overline{\gamma}_0 = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e \gamma_0^{e-1}$$

gesetzt ist. Also erhält man für die beiden Invarianten die Gleichungen:

$$(24.) \qquad \begin{cases} \delta \equiv f(e-1) \pmod 2, \\ \left(\frac{D_0}{p}\right) = \left(\frac{D(\varepsilon)}{p}\right)^e \left(\frac{N_\varepsilon(\overline{\gamma}_0)}{p}\right) = (-1)^{e(f-1)} \cdot \left(\frac{N(\overline{\gamma}_0)}{p}\right), \end{cases}$$

wenn man den in (19.) gefundenen Wert $(-1)^{f-1}$ von $\left(\frac{D(\varepsilon)}{p}\right)$ berücksichtigt.

Ich sehe zunächst von der einen geraden Primzahl $p = 2$ ab, setze also im folgenden p als ungerade voraus. Ist dann $\overline{\gamma}_0$ irgend eine ganze Zahl des Bereiches $K(\varepsilon)$ und beachtet man, daß für die konjugierten Zahlen $\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_0^{(1)}, \dots \overline{\gamma}_0^{(f-1)}$ allgemein

$$\overline{\gamma}_0^{(i)} \equiv \overline{\gamma}_0^{p^i} \pmod p$$

ist, so ergibt sich:

$$\left(\frac{N_\varepsilon(\overline{\gamma}_0)}{p}\right) \equiv (\overline{\gamma}_0 \overline{\gamma}_0^{(1)} \dots \overline{\gamma}_0^{(f-1)})^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\overline{\gamma}_0^{1+p+\cdots+p^{f-1}})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \overline{\gamma}_0^{\frac{p^f-1}{2}} \pmod p.$$

Eine Zahl $\overline{\gamma}_0$ des Körpers $K(\varepsilon)$ soll nun ebenfalls quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest von p heißen, je nachdem sie dem Quadrate einer Zahlgröße von $K(\varepsilon)$ für den Bereich von p gleich ist oder nicht. Eine leichte Überlegung, welche der entsprechenden innerhalb des Körpers der rationalen Zahlen durchaus äquivalent ist, zeigt nun, daß $\overline{\gamma}$ Rest oder Nichtrest von p ist, je nachdem

$$\overline{\gamma}_0^{\frac{p^f-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{oder} \quad \equiv -1 \pmod p$$

ist.

Ich will daher den kleinsten Rest dieser Potenz modulo p durch $\left\{\frac{\overline{\gamma}_0}{p}\right\}$ bezeichnen und ihn *den quadratischen Charakter der algebraischen Zahl* $\overline{\gamma}_0$

in bezug auf p nennen. Dann geht die Gleichung (24.) für $\left(\frac{D_0}{p}\right)$ bei Berücksichtigung von (23.) in die folgende einfachere über:

$$(24^a.) \qquad \left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{e(f-1)} \left\{\frac{\bar{\gamma}_0}{p}\right\} = (-1)^{e(f-1)} \left\{\frac{(-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e \gamma_0^{e-1}}{p}\right\},$$

wobei noch zu beachten ist, daß jede Quadratzahl in dem Zeichen $\{\ \}$ einfach fortgelassen werden kann.

Ich unterscheide jetzt in (24.) und (24ª.) die beiden Fälle, daß die Verzweigungsordnung e gerade oder ungerade ist.

I. e gerade:

$$\delta \equiv f \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \left\{\frac{(-1)^{\frac{e}{2}} \gamma_0}{p}\right\}.$$

II. e ungerade:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1} \left\{\frac{(-1)^{\frac{e-1}{2}} e}{p}\right\}.$$

Das letzte Kriterium läßt sich noch einfacher schreiben, da hier die Zahl $(-1)^{\frac{e-1}{2}} e$ rational ist. Ist nämlich E irgend eine ganze *rationale* Zahl, so besteht die Kongruenz

$$\left\{\frac{E}{p}\right\} = E^{\frac{p^f-1}{2}} \equiv \left(E^{\frac{p-1}{2}}\right)^{\frac{p^f-1}{p-1}} \equiv \left(\frac{E}{p}\right)^{1+p+\cdots+p^{f-1}} \equiv \left(\frac{E}{p}\right)^f \pmod p.$$

Also läßt sich der zweite Fall einfacher so schreiben:

II. e ungerade:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1} \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{e-1}{2}} e}{p}\right)^f,$$

und er zerfällt, je nachdem f gerade oder ungerade ist, in die beiden Unterfälle:

II^a. e ungerade, f gerade:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = -1.$$

II^b. e ungerade, f ungerade:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\frac{e-1}{2}} e}{p}\right).$$

Die vorher noch ausgeschlossene gerade Primzahl $p=2$ ordnet sich, wie man jetzt leicht sieht, unmittelbar dem Falle II unter. In der Tat muß ja hier die Verzweigungsordnung e ungerade sein, da sie kein Multiplum von 2 sein soll; die allgemeinen Gleichungen (24.) und (23.) gehen daher in diesem Falle über in

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{2}\right) = (-1)^{f-1}\left(\frac{N(\gamma_0)}{2}\right),$$

$$\overline{\gamma}_0 = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e \gamma_0^{e-1}.$$

In diesem Ausdrucke für $\overline{\gamma}$ kann aber die gerade Potenz γ_0^{e-1} einfach fortgelassen werden, weil ihre Norm ein rationales Quadrat ist, und ebenso kann e^e durch e ersetzt werden. So ergibt sich genau ebenso wie in (II):

III. $p=2$:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{2}\right) = (-1)^{f-1} \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{e-1}{2}} e}{2}\right),$$

und je nachdem f gerade oder ungerade ist, erhält man auch hier genau die Gleichungen (II^a) und (II^b). Beachtet man endlich, daß das Symbol $\left(\frac{D_0}{2}\right)$ in diesem Falle über den Charakter von D_0 modulo 8 entscheidet und daß hier die beiden Zahlen $n=ef$ und f zugleich gerade oder ungerade sind, so läßt sich das Resultat in dem folgenden Satze aussprechen:

> Ist die Primzahl 2 für den Körper $K(x)$ ein Verzweigungsteiler ungerader Ordnung, so ist sie in jeder Diskriminante desselben in gerader Potenz enthalten. Der primitive Teil D_0 einer jeden solchen Diskriminante ist entweder von der Form $8n+5$, oder er ist modulo 8 kongruent
>
> $$(-1)^{\frac{e-1}{2}} e,$$
>
> je nachdem der Grad des Körpers gerade oder ungerade ist.

Endlich läßt sich auch das allgemeinste Resultat für den Fall, daß die Verzweigungsordnung e ein Vielfaches der ungeraden Primzahl p ist, mit Hilfe der bisher durchgeführten Betrachtungen in sehr einfacher Weise aussprechen. In diesem Falle folgt nämlich aus (18.)

$$\delta = f(\bar{e}-1),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{e(f-1)} \left\{\frac{\bar{\gamma}_0}{p}\right\},$$

wo nach (16ª.)

$$\bar{\gamma}_0 = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} c_{e-1}^{e} \gamma_0^{\bar{e}-1}$$

ist. Substituiert man diesen Wert und beachtet, daß $\left\{\frac{-1}{p}\right\} = (-1)^{\frac{f(p-1)}{2}}$ ist, so ergibt sich schließlich

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{e(f-1)+\frac{ef(e-1)(p-1)}{4}} \left\{\frac{c_{e-1}^{-}}{p}\right\}^{e} \left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}^{\bar{e}-1}.$$

Unterscheidet man auch hier die einzelnen möglichen Fälle, so ergibt sich das folgende Schlußresultat:

e gerade.

$a)$ $\bar{e}$ ungerade.

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{\frac{n(p-1)}{4}}.$$

$b)$ $\bar{e}$ gerade:

$$\delta \equiv f \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{\frac{n(p-1)}{4}} \cdot \left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}.$$

e ungerade.

$a)$ $\bar{e}$ ungerade:

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1+\frac{(n-f)(p-1)}{4}} \left\{\frac{c_{e-1}^{-}}{p}\right\}.$$

$b)$ $\bar{e}$ gerade:

$$\delta \equiv f \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1+\frac{(n-f)(p-1)}{4}} \left\{\frac{c_{e-1}^{-}}{p}\right\}^{\bar{}} \left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}.$$

Die erste und wichtigste Invariante ist also die Zahl h aller Primfaktoren der Primzahl p und sie stimmt für diesen Bereich mit der von *Dirichlet* in die Theorie der Einheiten eingeführten Anzahl der reellen Faktoren der Grundgleichung vollständig überein. Bei der Bestimmung der Zahlen δ und $\left(\frac{D_0}{p}\right)$ für einen einzelnen Primdivisor treten noch außerdem die beiden Zahlen e und f, die Ordnung und der Grad desselben auf; zu ihnen tritt aber in dem regulären Falle noch die eine Invariante $\left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}$, während in dem allgemeinsten Falle außer ihr noch die beiden neuen Invarianten $\bar{e}$ und $\left\{\frac{c_{\bar{e}}-1}{p}\right\}$ hinzukommen.

Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right)=(-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité.

Par M. *D. Mirimanoff* et M. *K. Hensel.*

I.

(Extrait d'une lettre de M. *D. Mirimanoff* à M. *K. Hensel.*)

La relation

$$\left(\frac{D}{p}\right)=(-1)^{n-h}, \tag{1.}$$

si intimement liée à la formule élémentaire dans la théorie des unités complexes, sur laquelle M. *Voronoï* a appelé l'attention au 3e Congrès international à Heidelberg et que vous avez généralisée dans votre Mémoire pour le centenaire de *Dirichlet*,*) est susceptible de nombreuses applications. En voici une qui n'est peut-être pas dénuée d'intérêt.

Soit l un nombre premier différent de p. Appliquons la relation (1.) à la congruence

$$\frac{x^l-1}{x-1}\equiv 0 \pmod{p}, \tag{2.}$$

que l'on rencontre dans la théorie de la division du cercle.

Soit f l'exposant auquel appartient le nombre $p \pmod{l}$ et posons $e=\frac{l-1}{f}$.

On sait que le premier membre de (2.) se décompose en e facteurs irréductibles $(\mathrm{mod}\, p)$, d'où $h=e$.

D'autre part le discriminant de (2.) est égal à $(-1)^{\frac{l-1}{2}} l^{l-2}$.

*) Voir p. 78, n° (19a.) du mémoire précédent.

Il vient par conséquent, en appliquant la relation (1.),

$$\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{l-1}{2}}\left(\frac{l}{p}\right)=(-1)^{e}.$$

Mais $(-1)^{e}=\left(\frac{p}{l}\right)$, puisque p est un résidu si e est pair et un non-résidu si e est impair; d'autre part $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

On aura donc

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{l}{p}\right)=\left(\frac{p}{l}\right)$$

et l'on voit que *la loi de réciprocité de Legendre est une conséquence de la relation* (1.).

C'est là le résultat que je voulais établir. . . .

II.

(Extrait d'une lettre de M. *K. Hensel* à M. *D. Mirimanoff.*)

... Permettez-moi la remarque que votre démonstration de la loi de réciprocité peut être légèrement modifiée de manière qu'elle s'applique aussi au théorème supplémentaire.

En effet, soit p un nombre premier quelconque, l un nombre premier impair, et soit $\bar{l}=(-1)^{\frac{l-1}{2}}l$ sa forme primaire; alors le discriminant de votre équation (2.) est évidemment $D=\bar{l}^{l-2}$, et en appliquant la relation (1.), il vient, puisque $\bar{l}$ est primaire,

$$\left(\frac{p}{l}\right)=\left(\frac{D}{p}\right)=\left(\frac{\bar{l}}{p}\right)^{l-2}=\left(\frac{\bar{l}}{p}\right).$$

L'équation $\left(\frac{p}{\bar{l}}\right)=\left(\frac{\bar{l}}{p}\right)$ contient la loi générale de *Legendre*: et pour $p=2$ l'équation

$$\left(\frac{2}{\bar{l}}\right)=\left(\frac{\bar{l}}{2}\right)=(-1)^{\frac{\bar{l}-1}{4}}=(-1)^{\frac{l^2-1}{8}}$$

donne immédiatement le théorème supplémentaire.

Sur les Invariants Arithmétiques.

Par M. *H. Poincaré* à Paris.

§ 1. *Introduction.*

Lejeune-Dirichlet dans deux remarquables mémoires: *Sur l'Usage des Séries Infinies dans la Théorie des Nombres* (Journal de *Crelle*, tome 18) et *Recherches sur diverses Applications de l'Analyse Infinitésimale à la Théorie des Nombres* (Journal de *Crelle*, tome 19) est parvenu à déterminer le nombre des classes des formes quadratiques d'un déterminant donné. Il s'est servi pour cela de certaines séries infinies dont les propriétés sont remarquables.

J'ai eu moi-même l'occasion de me servir de séries identiques ou analogues dans divers articles relatifs aux *Invariants Arithmétiques* qui ont paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris en 1879 et dans ceux du Congrès d'Alger de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences en 1881.

Je demande la permission de revenir sur divers points relatifs à ces séries pour présenter une série de remarques, qui n'ont peut-être pas par elles-mêmes un très grand intérêt, mais qui ne sont cependant pas indignes d'attention, à cause du lien qui les rattache à l'œuvre de *Dirichlet*.

Ces remarques se rapportent aux fonctions fuchsiennes, aux fonctions abéliennes, aux fonctions elliptiques et à un certain nombre de transcendantes nouvelles plus ou moins apparentées aux fonctions elliptiques et fuchsiennes et à la fonction de *Fredholm*.

Ce qui permet de réunir ainsi dans un même travail un tel nombre de fonctions si diverses, c'est la communauté de leurs propriétés arithmétiques et leurs relations avec l'analyse de *Lejeune-Dirichlet*.

§ 2. *Invariants des formes linéaires.*

On sait qu'au point de vue algébrique, une forme linéaire

$$ax+by$$

n'a pas d'invariant; je veux dire qu'il n'existe pas de fonction uniforme des deux coëfficients a et b qui ne changent pas quand on remplace la forme linéaire par sa transformée par une substitution linéaire quelconque.

Elle en possède au contraire au point de vue arithmétique, c'est-à-dire qu'il y a des fonctions uniformes des deux coëfficients qui ne changent pas quand on remplace la forme linéaire par sa transformée par une substitution linéaire quelconque *à coëfficients entiers*. Ce sont les *Invariants Arithmétiques*.

Un bon exemple est fourni par la série

$$(1.) \qquad \Sigma \frac{1}{(am+bn)^k} = \Phi_k,$$

où m et n peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières possibles, positives, négatives ou nulles, à l'exception du système $m=0$, $n=0$. Cette série est absolument convergente pourvu que le nombre k soit plus grand que 2.

Dans les articles que j'ai cités, j'ai montré comment ces séries et en même temps les fonctions doublement périodiques peuvent s'exprimer par des intégrales définies simples. J'ai indiqué ensuite quel parti on peut en tirer pour reconnaître si deux formes quadratiques définies de même déterminant négatif sont ou non équivalentes, au sens arithmétique du mot.

Ces séries se rattachent aux fonctions elliptiques par le lien le plus direct. Si en effet, nous adoptons les notations de *Weierstrass*, et que nous fassions

$$a=2\omega, \qquad b=2\omega',$$

on aura

$$\Phi_4=\frac{g_2}{3.4.5}; \qquad \Phi_6=\frac{g_3}{4.5.7}; \qquad \Phi_8=\frac{g_2^2}{400.3.7}; \qquad \Phi_{10}=\frac{g_2 g_3}{80.3.7.11}; \cdots$$

Plus généralement, envisageons une fonction uniforme $\varphi(a, b)$ qui joue le rôle d'invariant arithmétique, c'est-à-dire qui satisfasse à la condition

$$\varphi(a, b)=\varphi(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b)$$

quand $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Il est clair que ce sera une fonction uniforme de g_2 et de g_3 et que réciproquement toute fonction uniforme de g_2 et de g_3 sera un invariant.

Considérons maintenant en particulier les invariants qui sont des fonctions homogènes de a et de b, ce qui est le cas de la fonction Φ_k définie par l'équation (1.); on aura

$$\varphi(a, b) = b^{-k}\ \varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right),$$

$$\varphi(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \delta b) = (\gamma a + \delta b)^{-k}\ \varphi\left(\frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b}, 1\right)$$

d'où, en faisant $b = 1$,

$$\varphi\left(\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, 1\right) = (\gamma a + \delta)^k\ \varphi(a, 1)$$

ce qui montre que si k est un entier positif et pair, $\varphi(a, 1)$ est une fonction thétafuchsienne correspondant à ce groupe fuchsien particulier qui engendre les fonctions modulaires.

On peut se demander si cette fonction peut être représentée par une de ces séries thétafuchsiennes que j'ai définies dans le § 1 de mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes (Acta Mathematica, tome 1). Et d'abord quelle est la forme de ces séries thétafuchsiennes dans le cas qui nous occupe.

Soit $H(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque, homogène d'ordre $-2k$ par rapport à x et à y et envisageons les séries:

$$(2.) \qquad \Sigma H(\alpha a + \beta,\ \gamma a + \delta) = \Sigma(\gamma a + \delta)^{-2k} H\left(\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, 1\right)$$

et

$$(2^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma H(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \delta b)$$

étendues à tous les systèmes de nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qui satisfont à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

La 1ère est une série thétafuchsienne, la 2de est un invariant arithmétique. Il faut toutefois 'que les séries convergent. En se reportant au mémoire cité sur les fonctions fuchsiennes, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une série de la forme (2.) sont:

1° que la fonction $H(x, 1)$ n'ait pas d'infini sur le cercle fondamental;

2° que k soit un entier plus grand que 1 (au moins égal à 2).

Mais dans le cas qui nous occupe, ces conditions doivent être légèrement modifiées, parce que ce qui joue ici le rôle du cercle fondamental, c'est une droite: l'axe des quantités réelles.

Il est aisé de transformer cette droite en un cercle par un changement linéaire de variable; on retombera sur une série de la même forme.

Soit par exemple

$$\Theta(z)=\Sigma H\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\,1\Big)\,(\gamma z+\delta)^{-2k} \tag{3.}$$

et posons

$$z=i\frac{t-1}{t+1}.$$

Soit de plus

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=i\,\frac{t'-1}{t'+1};\qquad t'=\frac{\alpha' t+\beta'}{\gamma' t+\delta'},$$

l'égalité (3.) deviendra

$$(t+1)^{-2k}\,\Theta\Big(i\frac{t-1}{t+1}\Big)=\Sigma\, H_1\Big(\frac{\alpha' t+\beta'}{\gamma' t+\delta'}\Big)\,(\gamma' t+\delta')^{-2k} \tag{3bis}$$

en posant

$$H_1(t)=H\Big(i\frac{t-1}{t+1},1\Big)\,(t+1)^{-2k}\,.$$

On voit que si la fonction homogène $H(x,y)$ n'admet pas en $y=0$ un zéro d'ordre $2k$ au moins, la fonction $H_1(t)$ aura un infini pour $t=-1$, c'est-à-dire sur le cercle fondamental et la convergence ne pourra avoir lieu.

Les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence sont donc:

1° que le nombre k soit un entier plus grand que 1;

2° que la fonction $H(x,y)$ ne puisse devenir infinie quand le rapport $\frac{y}{x}$ est réel;

3° qu'elle admette un zéro d'ordre $2k$ pour $y=0$.

Nous avons ainsi une nouvelle forme plus générale pour représenter les invariants arithmétiques, mais si nous revenons aux fonctions Φ_k définies par l'équation (1.) une nouvelle question se pose. La fonction thétafuchsienne $\Phi_k(a,1)$ peut-elle être représentée par une série thétafuchsienne?

Nous savons que dans le cas où le polygone générateur R_0 est tout entier à l'intérieur du cercle fondamental et n'a aucun sommet sur ce cercle, toute fonction thétafuchsienne peut être représentée par une série thétafuchsienne pourvu que $k\geqq 2$ (loco citato, page 246). Mais il n'en est pas toujours de

même quand le polygone générateur a un sommet sur le cercle fondamental. Il y a alors une condition à remplir (cf. loco cit. pages 215 et 275). Si a_i est un sommet situé sur ce cercle, et $\Theta_1(t)$ une série thétafuchsienne, on devra avoir

$$\lim (t-a_i)^{2k}\,\Theta_1(t)=0. \qquad \text{(pour } t=a_i\text{)}$$

Revenons à l'équation (3bis) et faisons

$$\Theta_1(t)=(t+1)^{-2k}\,\Theta\Big(i\frac{t-1}{t+1}\Big); \quad a_i=-1.$$

On devra avoir

$$\lim \Theta(z)=0. \qquad \text{(pour } z=\infty\text{)}$$

Si donc Φ_k était représentable par une série thétafuchsienne, on devrait avoir

$$\lim \Phi_k(z,1)=\lim \Sigma\frac{1}{(mz+n)^k}=0. \qquad \text{(pour } z=\infty\text{)}$$

Or on a évidemment

$$\lim \Sigma\frac{1}{(mz+n)^k}=2\lim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\geqslant 0.$$

Donc les Φ_k ne peuvent être mis sous la forme de séries thétafuchsiennes.

Mais à un certain point de vue les séries Φ_k peuvent être regardées comme une degénérescence des séries thétafuchsiennes.

Soit en effet ξ une quantité quelconque, non réelle, et envisageons la série thétafuchsienne

$$\Theta(z,\xi)=\Sigma\frac{1}{[(\alpha z+\beta)-\xi(\gamma z+\delta)]^{2k}}.$$

Si nous faisions tendre ξ vers zéro, nous aurions à la limite dans la série en question, une infinité de termes qui deviendraient égaux entre eux, ce qui suffit pour montrer que la série ne saurait être uniformément convergente.

Groupons les termes de la série convenablement, c'est-à-dire en réunissant ceux de ces termes qui deviendraient égaux entre eux à la limite. On les déduit du 1er d'entre eux en changeant γ et δ en

$$\gamma+m\alpha, \quad \delta+m\beta$$

m étant un entier quelconque positif ou négatif. Le terme général en question peut alors s'écrire:

$$\frac{1}{[(\alpha z+\beta)(1-m\xi)-\xi(\gamma z+\delta)]^{2k}}.$$

Nous sommes ainsi conduits à sommer la série

$$\Sigma \frac{1}{(a+bm)^{2k}}$$

où a et b sont des constantes et où l'on donne à m toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La sommation est aisée; on sait en effet que l'on a

$$\pi \operatorname{cotg} x\pi - \pi \operatorname{cotg} y\pi = \Sigma\left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m}\right)$$

d'où

$$\Sigma \frac{1}{(a+bm)^{2k}} = \frac{-1}{b^{2k}}(2k-1)!\ F_k\left(\frac{a}{b}\right)$$

en désignant par $F_k(x)$ la dérivée $(2k-1^e)$ de $\pi \operatorname{cotg} x\pi$.

Dans cette formule il faut faire

$$a=(\alpha z+\beta)-\xi(\gamma z+\delta), \quad b=-\xi(\alpha z+\beta)$$

d'où

$$\frac{a}{b}=-\frac{1}{\xi}+\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}.$$

Or si nous supposons x très grand, et par exemple de partie imaginaire positive, on aura sensiblement

$$(-1)(2k-1)!\ F_k(x)=A_k e^{2i\pi x},$$

A_k étant une constante ne dépendant que de k; si donc ξ est très petit et que sa partie imaginaire soit positive; on aura

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(\alpha z+\beta)(1-m\xi)-\xi(\gamma z+\delta)]^{2k}} = A_k \frac{e^{-\frac{2i\pi}{\xi}}}{\xi^{2k}} \frac{1}{(\alpha z+\beta)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}$$

d'où

$$\Theta(z,\xi)=A_k \frac{e^{-\frac{2i\pi}{\xi}}}{\xi^{2k}} \Sigma \frac{1}{(\alpha z+\beta)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}.$$

La sommation est étendue à tous les systèmes d'entiers α et β, *premiers entre eux*. Étant donnés deux entiers α et β premiers entre eux, on peut en effet toujours en déduire deux autres entiers γ et δ tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; le problème comporte même une infinité de solutions, mais qui toutes conduisent à la même valeur de l'exponentielle $e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}$.

Nous sommes donc conduits à un nouveau type d'invariants arithmétiques représentés par la série:

$$(4.) \qquad \Sigma \frac{1}{(\alpha a+\beta b)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}}.$$

La convergence de cette série est évidente si le rapport $\frac{a}{b}$ a sa partie imaginaire positive, il en est alors encore de même du rapport $\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}$ de sorte que l'exponentielle

$$(5.) \qquad e^{2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}}$$

est plus petite que 1 en valeur absolue.

Si au contraire le rapport $\frac{a}{b}$ a sa partie imaginaire négative, cette exponentielle a son module plus grand que 1; mais il est limité; car parmi les expressions en nombre infini

$$\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}$$

il y en a une dont la partie imaginaire est plus grande en valeur absolue que pour toutes les autres. La série converge donc encore.

Si ξ tend vers zéro de telle façon que sa partie imaginaire soit négative, il faut remplacer l'exponentielle (5.) par l'exponentielle

$$e^{-2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}},$$

mais la série reste encore convergente.

Posons maintenant

$$H(x,y)=\frac{1}{(x-\xi_1 y)(x-\xi_2 y)\dots(x-\xi_{2k} y)}$$

et

$$\Theta(a,b)=\Sigma H(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b).$$

Si nous décomposons la fonction rationnelle $H(x,y)$ en éléments simples, nous pouvons écrire

$$H(x,y)=\Sigma\frac{A_i x^{1-2k}}{x-\xi_i y},$$

les A_i étant des constantes. Je puis écrire ensuite

$$\Theta(a, b) = \Sigma\Sigma\Sigma \frac{A_i (\alpha a + \beta b)^{1-2k}}{X_i + Y_i m}$$

où

$$X_i = (\alpha a + \beta b) - \xi_i (\gamma a + \delta b); \quad Y_i = -\xi_i (\alpha a + \beta b).$$

Le premier signe Σ se rapporte à l'indice i; le second au nombre entier m; le troisième à tous les systèmes d'entiers α, β premiers entre eux.

Si nous effectuons d'abord les deux premières sommations, nous trouvons

$$(6.) \qquad \Sigma_i \frac{\pi A_i}{Y_i} \operatorname{cotg} \pi \frac{X_i}{Y_i} (\alpha a + \beta b)^{1-2k}.$$

Faisons tendre les ξ_i vers zéro; $\frac{X_i}{Y_i}$ tendra vers l'∞; et cotg $\pi \frac{X_i}{Y_i}$ tendra vers $+\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$ suivant le signe de la partie imaginaire de $\frac{X_i}{Y_i}$ ou ce qui revient au même, suivant celui de la partie imaginaire de ξ_i; de sorte que l'expression (6.) aura pour valeur asymptotique

$$-\pi\sqrt{-1}\,\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i} \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}$$

où ε_i est égal à $+1$ ou à -1, suivant le signe de la partie imaginaire de ξ_i.

Si les parties imaginaires étaient toutes de même signe, le coëfficient $\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i}$ se reduirait à

$$\pm \Sigma \frac{A_i}{\xi_i}$$

et par conséquent à zéro. Nous supposerons donc que les parties imaginaires des ξ_i ne sont pas toutes de même signe; et nous poserons

$$\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i} = B \geqslant 0.$$

Il vient alors

$$\lim \Theta(a, b) = -\pi\sqrt{-1}\, B\, \Sigma \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}.$$

La sommation s'étend à tous les entiers α et β *premiers entre eux*, mais il est clair que l'expression

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}$$

où α et β sont premiers entre eux, ne diffère de la même expression où

α et β sont des entiers quelconques, que par le facteur constant $\Sigma \frac{1}{m^{2k}}$ où m prend toutes les valeurs entières positives.

Ainsi se trouvent rattachés les invariants arithmétiques de la forme (1.) et aussi ceux de la forme (4.) à ceux de la forme (2.) ou (2bis.) qui s'expriment directement par une série thétafuchsienne.

L'uniformité de la convergence de ces séries s'établirait aisément, ce qui permettrait de se rendre mieux compte de la façon dont ces séries peuvent s'exprimer en fonctions de g_2 et de g_3, ou ce qui revient au même de la fonction fuchsienne:

$$x = f(z) = f\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

et de sa dérivée.

Prenons d'abord les fonctions thétafuchsiennes les plus simples, en supposant $k=2$. Elles seront de la forme:

$$(7.) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{P(x)}{x(x-1)Q(x)}$$

où le degré de $Q(x)$ dépasse d'une unité au moins celui de $P(x)$. Soient d'ailleurs q et p ces deux degrés de telle sorte que

$$q \geqq p+1.$$

Soient de plus $x_1, x_2, \ldots x_q$ les zéros de $Q(x)$; et $z_1, z_2, \ldots z_q$ les valeurs correspondantes de z. Notre fonction (7.) pourra s'exprimer par une série thétafuchsienne de la forme (2.) où $k=2$ et où

$$H(z;1) = \frac{\Pi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_q)(z-t_1)\ldots(z-t_r)}$$

où $z_1, z_2, \ldots z_q$ sont les quantités définies plus haut et dont la partie imaginaire est positive, tandis que $t_1, t_2, \ldots t_r$ ont leur partie imaginaire négative. Quant à $\Pi(z)$, c'est un polynôme de degré $q+r-4$. Nous prendrons pour plus de simplicité:

$$q=1, \quad r=3, \quad p=0; \quad q+r-4=0$$

de sorte que $P(x)$ et $\Pi(z)$ se réduisent à des constantes. Faisons maintenant tendre simultanément z_1, t_1, t_2, t_3 vers zéro de telle façon que x_1 tende vers

l'∞. Alors à un facteur constant près, la série thétafuchsienne tend vers une série de la forme (1.) et la fonction (7.) vers

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{1}{x(x-1)}.$$

Si nous supposons au contraire:

$$q=4, \quad r=0, \quad p=3, \quad q+r-4=0$$

tous les pôles de $H(z,1)$ ont leurs parties imaginaires positives et quand les z_i tendront simultanément vers zéro, la série thétafuchsienne tendra à un facteur constant près vers une série de la forme (4.) et la fonction (7.) vers

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{P_3}{x(x-1)},$$

P_3 étant un polynôme du 3e degré.

Supposons enfin:

$$q=0, \quad r=4, \quad q+r-4=0, \quad p<0.$$

L'inégalité $p<0$ signifie que le polynôme $P(x)$ doit être identiquement nul. Ici tous les pôles de $H(z)$ ont leur partie imaginaire négative, de sorte qu'à la limite la série thétafuchsienne devra se réduire à une série de la forme (4.). *Il y a donc de ces séries de la forme* (4.) *qui sont identiquement nulles.*

D'autre part, en développant les considérations qui précèdent, on pourrait trouver entre les séries de la forme (4.) et (1.) diverses relations d'où l'on pourrait sans doute déduire des théorèmes d'Arithmétique.

Il va sans dire que toutes ces séries qui définissent les invariants arithmétiques n'auraient aucune signification si le rapport $\frac{a}{b}$ était réel. Elles n'en auraient pas non plus si k (dans la formule 1) n'était pas un entier pair; si k était un entier impair, Φ_k serait identiquement nul. Si k n'était pas entier, chacun des termes de la série Φ_k ne serait pas entièrement déterminé et il n'y a pas moyen de choisir leur détermination de façon à conserver à la série toutes ses propriétés essentielles.

Il faudrait donner un moyen d'exprimer toutes ces séries à l'aide de g_2 et de g_3 (ou de x et de $\frac{dx}{dz}$). C'est là un problème sur lequel je suis revenu à diverses reprises dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes sans pouvoir en donner une solution complète et satisfaisante. Je me bornerai

encore ici à développer certaines considérations qui sont de nature à jeter quelque lumière sur ce problème, et qui en même temps nous fournissent une généralisation inattendue de la théorie des intégrales abéliennes de 1ère et de 2de espèce. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

§ 3. *Relations avec les fonctions fuchsiennes.*

Rappelons d'abord quelques-uns des résultats de mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes (Acta Mathematica tome 1).

Outre les séries thétafuchsiennes, j'ai eu à considérer certaines fonctions que j'ai appelées $\Delta(z)$ (loco cit. p. 238). Ces fonctions sont de la forme suivante:

$$\Delta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{\Pi(x-a_i)^{\mu_i}}{Q}.$$

Dans cette formule $x=f(z)$ représente une fonction fuchsienne de z; les nombres h et μ_i sont entiers; Q est un polynôme entier en x. Les a_i sont les points singuliers de l'équation différentielle qui définit la fonction fuchsienne, c'est-à-dire les valeurs que prend la fonction $f(z)$ aux sommets du polygone générateur du groupe fuchsien. Les entiers h et μ_i ainsi que le degré du polynôme Q sont assujettis à certaines inégalités.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a que trois points singuliers a_i et nous pouvons supposer que ce sont $0, 1, \infty$; le polygone générateur se décompose en deux triangles ayant pour angles 0 (pour $x=\infty$), $\frac{\pi}{2}$ (pour $x=0$), $\frac{\pi}{3}$ (pour $x=1$). Si nous prenons alors $h=1$ pour nous borner au cas le plus simple, nous aurons

$$\Delta(z) = \frac{dz}{dx}\frac{x(x-1)}{x-x_1},$$

x_1 étant une constante quelconque.

Si nous prenons un h quelconque, nous aurons

$$\Delta(z) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{h} \frac{x^{\lambda}(x-1)^{\lambda_1}}{F(x)} R(x), \tag{1.}$$

$F(x)$ étant un polynôme de degré p et les nombres entiers λ, λ_1 et p étant déterminés comme il suit:

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{si } h=6n+1, & \lambda=3n+1, & \lambda_1=4n+1, & p=n+1 \\ \text{si } h=6n+2, & \lambda=3n+1, & \lambda_1=4n+2, & p=n+1 \\ \text{si } h=6n+3, & \lambda=3n+2, & \lambda_1=4n+2, & p=n+1 \\ \text{si } h=6n+4, & \lambda=3n+2, & \lambda_1=4n+3, & p=n+1 \\ \text{si } h=6n+5, & \lambda=3n+3, & \lambda_1=4n+4, & p=n+2 \\ \text{si } h=6n+6, & \lambda=3n+3, & \lambda_1=4n+4, & p=n+1. \end{cases}$$

Quant à $R(x)$ c'est une fonction rationnelle de x où le dénominateur est de degré au moins égal au numérateur et où le dénominateur ne contient pas de facteur x ou $x-1$.

Considérons maintenant les fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce, c'est-à-dire celles qui restent toujours finies. Elles sont de la forme:

$$(3.)\qquad \Theta(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}\frac{F(x)}{x^{\lambda}(x-1)^{\lambda_1}},$$

où $F(x)$ est un polynôme de degré $p-2$ et où les entiers λ, λ_1 et p ont des valeurs conformes au tableau (2.)

On voit que pour $h=1,2,3,4,6$ il n'y a pas de fonction thétafuchsienne de 1ère espèce et que ces fonctions apparaissent pour la 1ère fois pour $h=5$.

Si nous considérons la formule (1.), nous voyons que la fonction $\Delta(z)$ a $p+q$ infinis, q étant le degré du dénominateur de $R(x)$; que quand ces infinis sont regardés comme donnés, le nombre maximum des paramètres arbitraires contenus dans $\Delta(z)$ est égal à $q+1$, c'est-à-dire au nombre des coefficients du numérateur de $R(x)$.

Entre les $p+q$ résidus de $\Delta(z)$, il y a donc $p-1$ relations linéaires. D'autre part, l'examen de la formule (3.) nous montre qu'il y a $p-1$ fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce. Et comme les nombres entiers h, λ, λ_1, p ont même valeur dans les formules (1.) et (3.), nous devons conclure que le nombre des relations entre les résidus de $\Delta(z)$ est égal au nombre des fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce.

C'est là une propriété qui n'est pas spéciale aux fonctions modulaires et qui est vraie d'une fonction fuchsienne quelconque (cf. loco cit. page 266). Bornons-nous par exemple aux fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à

l'intérieur du cerle fondamental, et soit $A(z)$ une fonction de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} X,$$

x et X étant deux fonctions fuchsiennes; de telle sorte que $A(z)$ satisfasse à la condition:

$$A\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=(\gamma z+\delta)^{2h}A(z).$$

Supposons que cette fonction $A(z)$ ait des infinis donnés, différents des sommets du polygone générateur. *Il y aura entre les résidus de cette fonction autant de relations linéaires qu'il y a de fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce* de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1} X.$$

Et comme on démontre d'autre part que le nombre de ces relations linéaires est égal au nombre des séries thétafuchsiennes, c'est ainsi que j'ai démontré dans le mémoire cité que toute fonction thétafuchsienne de 1ère espèce est représentable par une série thétafuchsienne, ce qu'il aurait été très difficile d'établir par une autre voie.

Quoi qu'il en soit, ces résultats vont être notre point de départ. Considérons une fonction A satisfaisant à la définition précédente, nous remarquerons que sa dérivée d'ordre $2h+1$

$$\frac{d^{2h+1}A}{dz^{2h+1}}$$

est une fonction thétafuchsienne (cf. loco cit. page 247). Soit alors

$$A=X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h};\quad \frac{d^{2h+1}A}{dz^{2h+1}}=Y\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1},$$

X et Y étant des fonctions fuchsiennes, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de x dans le cas particulier des fonctions modulaires et des fonctions fuchsiennes de genre zéro, ou des fonctions rationnelles de x et de y dans le cas général des fonctions fuchsiennes de genre quelconque, qui s'expriment comme on le sait, à l'aide de deux d'entre elles, x et y liées par une relation algébrique.

On voit que Y est une expression linéaire par rapport à X et à ses dérivées $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, ... Comment former cette expression; égalons-la à zéro.

L'équation

$$Y=0$$

sera une équation différentielle linéaire en X, quelle en sera la signification? Soit

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\varphi(x,y) \tag{4.}$$

l'équation linéaire du 2^{d} ordre qui a donné naissance au système de fonctions fuchsiennes considéré. Elle admet comme intégrales

$$z\sqrt{\frac{dx}{dz}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{dx}{dz}}.$$

Eh bien, l'équation $Y=0$ admettra comme intégrales:

$$z^{2h}\left(\frac{dx}{dz}\right)^h,\ z^{2h-1}\left(\frac{dx}{dz}\right)^h,\ \ldots\quad z\left(\frac{dx}{dz}\right)^h,\left(\frac{dx}{dz}\right)^h$$

de sorte qu'on l'obtiendra en formant l'équation linéaire à laquelle satisfont les puissances $2h^{es}$ des intégrales de l'équation (4.).

Et en effet, si oubliant un instant la signification de la fonction A, nous cherchons à intégrer l'équation $Y=0$, nous trouvons d'abord que la derivée $2h+1^{e}$ de A est nulle, par conséquent que A est un polynôme de degré $2h$ en z, et X un pareil polynôme multiplié par $\left(\frac{dx}{dz}\right)^h$.

Cela posé, envisageons une fonction thétafuchsienne quelconque Θ; intégrons-la $2h+1$ fois par rapport à z, et soit $M(z)$ le résultat de cette intégration de telle sorte que

$$\frac{d^{2h+1}M}{dz^{2h+1}}=\Theta(z).$$

Soit

$$M=X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h};\ \Theta(z)=Z\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1},$$

nous aurons

$$Y=Z,$$

Y étant formé avec X comme nous l'avons dit plus haut, tandis que Z est une fonction fuchsienne, c'est-à-dire une fonction rationnelle de x et y que nous regardons comme donnée. Comme nous savons intégrer l'équation linéaire sans second membre $Y=0$, nous saurons intégrer l'équation à 2^{d} membre $Y=Z$.

Quelles sont maintenant les propriétés fondamentales de la fonction $M(z)$. Pour cela reprenons l'équation $Y=Z$, et la surface de *Riemann* relative à la relation algébrique entre x et y. Décrivons sur cette surface un cycle fermé, ou un contour fermé enveloppant certains points singuliers, x, y et Z reviendront à leur valeur primitive, z subira une des substitutions du groupe fuchsien et se changera en

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Ainsi la nouvelle comme l'ancienne détermination de X satisferont à une même équation $Y=Z$, de sorte que la différence de ces deux déterminations devra satisfaire à $Y=0$, c'est-à-dire se réduire à un polynôme en z multiplié par $\left(\frac{dx}{dz}\right)^h$; j'écris:

$$X'=X+\left(\frac{dx}{dz}\right)^h P,$$

X' étant la nouvelle détermination de X, et P un polynôme de degré $2h$ en z. Or nous avons

$$M(z)=X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h},\ M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=M(z')=X'\left(\frac{dx}{dz'}\right)^{-h}=X'\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}\left(\frac{dz}{dz'}\right)^{-h},$$

$$M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=X'\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(\gamma z+\delta)^{-2h}$$

d'où enfin:

$$M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=M(z)(\gamma z+\delta)^{-2h}+(\gamma z+\delta)^{-2h}P.$$

Il vaudra mieux dans ces conditions, mettre la relation sous la forme homogène, en mettant à profit l'idée de M. *Klein*. Soit $F(z)$ une fonction de z et convenons de poser:

$$F(\xi,\eta)=\eta^k F\left(\frac{\xi}{\eta}\right),$$

où k est égal à 0, si $F(z)$ est une fonction fuchsienne, à $2h$, si $F(z)$ est la fonction $M(z)$ ou $\Delta(z)$ et à $-2h-2$, si $F(z)$ est la fonction $\Theta(z)$. Dans ces conditions on a, pour une substitution quelconque du groupe fuchsien

$$(5.)\qquad \begin{cases} \Delta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=\Delta(\xi,\eta), \\ \Theta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=\Theta(\xi,\eta), \\ M(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=M(\xi,\eta)+P(\xi,\eta), \end{cases}$$

$P(\xi,\eta)$ étant un polynôme homogène de degré $2h$ en ξ et η.

Et c'est ici que commence à apparaître l'analogie que j'avais en vue avec la théorie des intégrales abéliennes. Les fonctions Θ, ou plutôt les fonctions rationnelles Z qui en dépendent, joueront le rôle des expressions algébriques à intégrer, les fonctions M joueront le rôle des intégrales abéliennes elles-mêmes; enfin les polynômes P joueront celui des périodes.

Pour justifier cette assimilation, il suffit de montrer que la théorie des intégrales abéliennes rentre comme cas particulier dans la théorie générale que je viens d'esquisser. Considérons, en effet, le cas où le polygone générateur du groupe fuchsien se réduit à un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est égale à 2 droits. Supposons de plus $h=0$; nous aurons alors affaire à des fonctions thétafuchsiennes incapables d'être représentées par des séries thétafuchsiennes, puisque ces séries ne peuvent converger que si $h+1$ est au moins égal à 2. Mais cela ne fait rien.

On a alors simplement

$$M(z)=\int \Theta(z)\,dz=\int Z dx.$$

Comme Z est une fonction rationnelle de x et de y, on voit que M est simplement une intégrale abélienne.

Revenons au cas de $h>0$; nous distinguerons parmi les fonctions $M(z)$:

1°. Celles qui ne deviennent jamais infinies; *ce seront les intégrales de 1ère espèce.* On les obtiendra en partant des fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce.

Le nombre des intégrales de 1ère espèce indépendantes (c'est-à-dire dont une combinaison linéaire ne se réduit pas à un polynôme $P(\xi,\eta)$ de degré $2h$) est évidemment égal au nombre des fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce, c'est-à-dire (vide supra) à $p-1$.

2°. Celles qui deviennent infinies, mais n'ont d'autre singularité que des pôles. *Ce sont les intégrales de 2e espèce.*

Combien y a-t-il d'intégrales de 2e espèce indépendantes (c'est-à-dire dont une combinaison linéaire ne se réduit pas à une fonction $A(z)$ plus une intégrale de première espèce.)?

Considérons celles qui admettent q infinis donnés, ou quelques-uns de ces infinis. S'il y en a plus de $p-1$, on pourra trouver une combinaison linéaire de ces intégrales dont les résidus satisfassent à $p-1$ relations

linéaires quelconques. Soit $C(z)$ cette combinaison. Par exemple on peut prendre les $p-1$ relations auxquelles doivent satisfaire les résidus d'une fonction $A(z)$. Alors les résidus de l'intégrale $C(z)$ sont égaux à ceux d'une fonction $A(z)$ et la différence $C(z)-A(z)$ ne devenant plus infinie est une intégrale de 1ère espèce.

Le nombre des intégrales indépendantes est donc au plus égal à $p-1$.

La forme de ce raisonnement suppose que tous les infinis sont simples, mais il serait aisé de l'étendre aux infinis multiples.

Considérons maintenant la fonction

$$\Phi(z,a)=\Sigma\frac{1}{z-\dfrac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta}}\frac{1}{(\gamma a+\delta)^{2h+2}}$$

(cf. loco citato page 242). C'est une intégrale de 2e espèce, et même elle peut être considérée comme l'intégrale de 2e espèce élémentaire. C'est de plus une fonction thétafuchsienne de a.

Considérons $p-1$ de ces fonctions

$$\Phi(z,a_1),\ \Phi(z,a_2),\ldots\Phi(z,a_{p-1})$$

en choisissant $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ d'une manière quelconque. Si ces $p-1$ fonctions n'étaient pas distinctes, on pourrait trouver $p-1$ nombres $A_1, A_2, \ldots A_{p-1}$ tels que la combinaison

$$\Sigma A_i\,\Phi(z,a_i)$$

se réduise à une fonction $A(z)$ plus une intégrale de 1ère espèce. C'est-à-dire qu'on pourrait trouver une fonction $A(z)$ qui admette seulement les infinis

$$a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$$

avec les résidus

$$A_1, A_2, \ldots A_{p-1}.$$

Mais les résidus d'une fonction $A(z)$ sont assujettis à $p-1$ relations linéaires distinctes auxquelles les A_i devraient satisfaire, ce qui ne serait possible (puisque le nombre des relations linéaires *distinctes* est égal à celui des A_i) que si tous ces nombres A_i étaient nuls.

Donc les fonctions $\Phi(z,a_i)$ sont indépendantes.

Donc le nombre des intégrales indépendantes est au moins égal à $p-1$.

En résumé,

Le nombre des intégrales indépendantes de 2de espèce est égal à celui des intégrales indépendantes de 1ère espèce.

Étudions maintenant les périodes et prenons d'abord celles qui se rapportent à une substitution linéaire elliptique

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right).$$

Écrivons cette substitution sous la forme:

$$\left(\frac{\lambda z+\mu}{\varrho z+\sigma}, j^2\frac{\lambda z+\mu}{\varrho z+\sigma}\right),$$

j étant une racine $2k^e$ de l'unité.

Posons

$$H(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)=M(\xi,\eta);\ Q(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)=P(\xi,\eta).$$

L'équation

$$M(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=M(\xi,\eta)+P(\xi,\eta)$$

pourra s'écrire

$$H(j\lambda\xi+j\mu\eta,\ j^{-1}\varrho\xi+j^{-1}\sigma\eta)=H(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)+Q(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta).$$

On a donc

$$H(j\xi, j^{-1}\eta)=H(\xi,\eta)+Q(\xi,\eta).$$

De cette équation, nous pouvons en déduire plusieurs autres en changeant ξ en $j\xi, j^2\xi, \ldots j^{k-1}\xi$; et η en $j^{-1}\eta, j^{-2}\eta, \ldots j^{1-k}\eta$

$$\begin{aligned}
H(j^2\xi, j^{-2}\eta) &= H(j\xi, j^{-1}\eta) \quad + Q(j\xi, j^{-1}\eta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H(j^k\xi, j^{-k}\eta) &= H(j^{k-1}\xi, j^{1-k}\eta)+Q(j^{k-1}\xi, j^{1-k}\eta).
\end{aligned}$$

Mais comme j est une racine $2k^e$ de l'unité, on a

$$H(j^k\xi, j^{-k}\eta)=H(\pm\xi, \pm\eta)=H(\xi,\eta)$$

et par conséquent

$$Q(\xi,\eta)+Q(j\xi, j^{-1}\eta)+\cdots+Q(j^{k-1}\xi, j^{1-k}\eta)=0$$

ce qui signifie que dans le polynôme Q tous les termes où la différence des exposants de ξ et de η est nulle ou un multiple de $2k$ doivent être nuls.

Le nombre des coëfficients distincts du polynôme Q (ou ce qui revient au même du polynôme P), est égal à 2ω, ω étant le plus petit nombre entier satisfaisant à l'inégalité

$$\omega \geqq h\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Dans le cas des fonctions modulaires nous n'aurons à envisager que deux polynômes P, le 1er correspondant à la substitution $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$ pour laquelle $k=2$, et le 2d à la substitution $\left(z, \frac{z-1}{z}\right)$ pour laquelle on a $k=3$. Pour le 1er ω sera égal au nombre λ du tableau (2.); pour le 2d au nombre λ_1, de ce même tableau, de sorte que le nombre des coëfficients arbitraires serait

$$2\lambda+2\lambda_1.$$

Mais nous pouvons ajouter à l'intégrale $M(z)$ un polynôme entier quelconque en z d'ordre $2h$, sans que sa dérivée d'ordre $2h+1$ cesse d'être égale à $\Theta(z)$. Ce polynôme contient $2h+1$ coëfficients arbitraires. Nous pourrons donc ajouter à $M(z)$ un polynôme choisi de façon à annuler $2h+1$ des coëfficients arbitraires des périodes. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait qu'il existât un polynôme entier en z dont toutes les périodes fussent nulles, c'est-à-dire qui fût égal à une fonction $A(z)$. Or il n'y en a pas (sauf le cas de $h=0$, que nous excluons).

Ce n'est pas tout; soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ les périodes relatives aux deux substitutions elliptiques envisagées plus haut, de sorte que

$$M(-\eta, \xi) = M(\xi, \eta) + P(\xi, \eta),$$
$$M(\xi-\eta, \xi) = M(\xi, \eta) + Q(\xi, \eta).$$

Si nous faisons $\xi=0$, il vient

$$M(-\eta, 0) = M(0, \eta) + P(0, \eta),$$
$$M(-\eta, 0) = M(0, \eta) + Q(0, \eta)$$

d'où enfin

$$P(0, \eta) = Q(0, \eta).$$

Cette condition étant distincte des précédentes, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, il nous reste

$$2\lambda+2\lambda_1-(2h+1)-1=2p-2$$

coëfficients arbitraires.

Le nombre des coëfficients arbitraires est donc au plus $2p-2$.

Il ne peut pas non plus être inférieur. Car s'il l'était, on ne pourrait trouver $2p-2$ intégrales de 1ère et de 2de espèce linéairement indépendantes. Car si nous prenons $2p-2$ intégrales $M(z)$ quelconques, nous pourrions en former une combinaison linéaire et choisir les coëfficients de cette combinaison de telle sorte que toutes ses périodes soient nulles, c'est-à-dire qu'elle se réduise à une fonction $\Lambda(z)$.

Or nous savons qu'il existe précisément $2p-2$ intégrales indépendantes de 1ère et de 2de espèce.

Donc en résumé:

Le nombre des coëfficients arbitraires des périodes est double de celui des intégrales de 1ère espèce.

Ce théorème est d'ailleurs général.

On peut trouver d'autres analogies avec la théorie des intégrales abéliennes, ainsi la possibilité de décomposer en intégrales simples de 2e espèce les fonctions $\Lambda(z)$ qui jouent ici le rôle des fonctions rationnelles $R(x,y)$ dans l'étude des intégrales abéliennes. D'autre part, les relations entre les résidus des fonctions $\Lambda(z)$ correspondent au théorème de *Riemann-Roch*.

Enfin $\Phi(z,a)$ est une intégrale de 2e espèce par rapport à z, et c'est en même temps une fonction thétafuchsienne de a; il y a là une sorte de réciprocité qui n'est pas sans analogie avec la Vertauschung von Parameter und Argument de *Clebsch* et *Gordan*.

Mais revenons au problème qui nous avait servi de point de départ. Il s'agissait de ramener les fonctions thétafuchsiennes à la forme de séries thétafuchsiennes, ou si l'on préfère, de chercher la condition nécessaire et suffisante de l'identité de deux expressions thétafuchsiennes, mises soit sous la forme de séries thétafuchsiennes, soit sous la forme des séries (1.) et (4.) du paragraphe précédent, soit sous la forme du produit de $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}$ par une fonction rationnelle de x et de y.

Nous pouvons maintenant énoncer ces conditions. Il faut et il suffit:

1° Que les infinis soient les mêmes avec les mêmes résidus.

2° Que les périodes soient les mêmes.

Encore ces conditions ne sont-elles pas distinctes; il suffit que $p-1$ des coëfficients arbitraires des périodes (sur $2p-2$) soient les mêmes.

§ 4. *Invariants des Formes Quadratiques Définies.*

Après avoir envisagé les invariants arithmétiques d'une forme linéaire isolée, nous sommes conduits à étudier ceux de deux formes linéaires simultanées, d'où il est aisé de déduire ceux d'une forme quadratique.

Soient $ax+by$ et $a'x+b'y$ deux formes linéaires simultanées, nous cherchons les fonctions des 4 coëfficients a, b, a', b' qui demeurent inaltérées quand les deux formes subissent une *même* substitution linéaire à coëfficients entiers.

Si $j_1, j_2, \ldots j_p$ sont des invariants de la forme $ax+by$ regardée comme isolée, si $j'_1, j'_2 \ldots j'_q$ sont des invariants de la forme isolée $a'x+b'y$, il est clair d'abord que toute fonction uniforme des j et des j' est un invariant des deux formes simultanées.

Mais tous les invariants de ces deux formes ne peuvent pas s'obtenir ainsi; ceux qu'on peut définir de la sorte, ne sont pas altérés, non seulement quand les deux formes subissent une *même* substitution, mais encore quand elles subissent deux substitutions *différentes*. Ce ne sont donc que des invariants très particuliers et qui ne présentent pas d'intérêt spécial, puisqu'ils se ramènent immédiatement à ceux que nous venons d'étudier.

Il est aisé d'en obtenir d'autres; soient:

$$F_1=(ax+by)+\xi_1(a'x+b'y),\ F_2=(ax+by)+\xi_2(a'x+b'y),\ \ldots$$
$$F_p=(ax+by)+\xi_p(a'x+b'y)$$

p combinaisons linéaires de nos deux formes; les lettres $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ représentent p coëfficients constants quelconques. Soit j_1 un invariant de F_1, j_2 un invariant de F_2, $\ldots j_p$ un invariant de F_p. Toute fonction uniforme de $j_1, j_2, \ldots j_p$ sera encore un invariant de nos deux formes.

Considérons maintenant la forme quadratique

$$(ax+by)(a'x+b'y)=aa'x^2+(ab'+ba')xy+bb'y^2$$

qui est le produit de nos deux formes linéaires. Toute fonction de aa', $ab'+ba'$, bb' qui sera un invariant arithmétique de nos deux formes linéaires, sera un invariant de la forme quadratique; et la réciproque est d'ailleurs vraie.

D'après ce que nous avons dit des invariants des formes linéaires, nous sommes conduits à envisager spécialement les invariants des deux

formes linéaires qui dépendent seulement des rapports

$$\frac{a}{b}=z, \quad \frac{a'}{b'}=z'$$

c'est-à-dire les fonctions $F(z, z')$ telles que

$$F\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}\right)=F(z, z'). \tag{1.}$$

C'est ainsi que parmi les invariants d'une seule forme linéaire, nous avons distingué les fonctions fuchsiennes $F(z)$, tandis que les autres se ramènent aux fonctions thétafuchsiennes.

Parmi les fonctions $F(z, z')$ qui jouissent de la propriété précédente, celles qui sont symétriques en z et z' sont des invariants de la forme quadratique.

Si nous considérons les différentes substitutions linéaires à coëfficients entiers, nous considérerons que pour une infinité d'entre elles, les deux nombres

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}$$

sont infiniment près d'être réels; ce qui nous montre d'abord que les points pours lesquels z et z' sont réels tous deux, seront des points singuliers de la fonction $F(z, z')$. Mais d'autre part, si z et z' sont deux nombres qui ne sont pas tous deux réels, il sera impossible de trouver une infinité de substitutions telles que les deux équations

$$z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad z'=\frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}$$

soient infiniment près d'être simultanément satisfaites.

On pourrait donc être tenté de croire qu'il est possible de former des fonctions $F(z, z')$ (ou plus généralement des invariants arithmétiques des deux formes simultanées $ax+by$ et $a'x+b'y$) qui n'admettent d'autres points singuliers que ceux pour lesquels z et z' sont réels tous deux. Cela n'est pas possible; supposons en effet que z et z' soient liés par la relation

$$zz'+i(z-z')+1=0; \tag{2.}$$

alors $F(z, z')=F\left(z, \frac{-1-iz}{z-i}\right)$ sera fonction uniforme de z seulement et comme z et z' en vertu de la relation (2.) ne peuvent être réels à la fois, la fonction $F(z, z')$ n'aurait aucun point singulier essentiel, ce qui est impossible.

Nous avons bien des manières de former des invariants arithmétiques; considérons par exemple la série

$$(3.) \qquad \Sigma H\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}\Big)(\gamma z+\delta)^{-2m}(\gamma z'+\delta)^{-2m}$$

analogue aux séries thétafuchsiennes et où la sommation est étendue à toutes les substitutions linéares du groupe.

Cette série où $H(z, z')$ représente une fonction rationnelle de z et de z' converge pourvu que:

1° Le nombre m soit entier et positif.

2° La fonction $H(z, z')$ ne puisse devenir infinie ou indéterminée quand z et z' sont tous deux réels.

3° Le produit $H(z, z')\, z^m z'^m$ tende vers une limite finie et déterminée quand z et z' croissent indéfiniment.

Posons alors

$$b^{-2m} b'^{-2m} H\Big(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\Big) = H(a, b, a', b');$$

la série (3.) pourra s'écrire

$$(3^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma H(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b') = \Theta(a, b, a', b')$$

et se présentera directement sous la forme d'un invariant des deux formes linéaires. Si la fonction $H(z, z')$ est symétrique en z et z', ce sera un invariant de la forme quadratique. Si l'on donne à la série la forme (3bis.) la condition de convergence est que H soit une fonction rationnelle homogène de degré $-2m$ tant par rapport à a et à b que par rapport à a' et b' et dont le dénominateur ne puisse s'annuler quand les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ prennent une même valeur réelle.

Nous obtiendrons évidemment une autre forme d'invariants en envisageant les séries

$$(4.) \qquad \Sigma \frac{1}{(\gamma a+\delta b)^s (\gamma a'+\delta b')^s}$$

où γ et δ peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières possibles sauf le système $\gamma=\delta=0$, et où nous supposerons d'abord s entier (et d'ailleurs >1). Les invariants définis par les séries (3bis.) ou (4.) admettent comme points singuliers essentiels, non-seulement ceux où z et z'

sont réels *tous deux*, mais ceux où *l'une* seulement de ces deux quantités est réelle. Ils n'en admettent d'ailleurs pas d'autre.

Soient maintenant λ et μ, λ' et μ' quatre constantes quelconques, et reprenant la fonction Θ définie par l'équation (3bis.), formons l'expression

$$(3^{ter}) \qquad \Theta(\lambda a+\mu a',\ \lambda b+\mu b',\ \lambda' a+\mu' a',\ \lambda' b+\mu' b')$$

ce sera un invariant arithmétique des deux formes linéaires, mais non plus de la forme quadratique, ses points singuliers seront ceux pour lesquels l'un des deux rapports

$$\frac{\lambda a+\mu a'}{\lambda b+\mu b'},\qquad \frac{\lambda' a+\mu' a'}{\lambda' b+\mu' b'}$$

sera réel. Plus généralement soit $H(a, b, a', b')$ une fonction rationnelle quelconque homogène de degré $-4m$ par rapport aux 4 variables a, b, a', b'. Formons la série

$$(5.) \quad \Sigma H(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b')=\Theta_1(a, b, a', b').$$

Si cette série est convergente, Θ_1 sera encore un invariant des deux formes linéaires. Soit $Q(a, b, a', b')$ le dénominateur de H; l'ensemble des points où l'un des termes de la série devient infini sera donné par les équations

$$(6.) \qquad Q(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b')=0.$$

Mais ce dont nous devons surtout nous préoccuper, c'est de rechercher l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité d'équations (6.) qui sont satisfaites. Ces points seront en effet les points singuliers essentiels de la fonction Θ_1.

Soit d'abord z_0 une quantité commensurable quelconque. Posons

$$\alpha=1+hz_0,\quad \beta=-hz_0^2,\quad \gamma=h,\quad \delta=1-hz_0$$

d'où $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; comme z_0 est commensurable on peut choisir h d'une infinité de manières de façon que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient entiers, et on aura

$$\alpha a+\beta b=a+hz_0(a-z_0b),\qquad \gamma a+\delta b=b+h(a-z_0b),$$
$$\alpha a'+\beta b'=a'+hz_0(a'-z_0b'),\qquad \gamma a'+\delta b'=b'+h(a'-z_0b')$$

de sorte que quand h croîtra indéfiniment, les rapports des quantités

$$\alpha a+\beta b,\quad \gamma a+\delta b,\quad \alpha a'+\beta b',\quad \gamma a'+\delta b'$$

tendront vers ceux des quantités

$$z_0(a-z_0b),\quad (a-z_0b),\quad z_0(a'-z_0b'),\quad (a'-z_0b').$$

Si donc le point a, b, a', b' satisfait à l'équation

$$(7.)\qquad Q[z_0(a-z_0b),\ (a-z_0b),\ z_0(a'-z_0'b'),\ (a'-z_0b')]=0,$$

il y aura dans le voisinage de ce point une infinité d'autres points où des équations de la forme (6.), différentes pour tous ces points, seront satisfaites. Et cela sera vrai quand on donnera à z_0 une valeur commensurable et par conséquent aussi une valeur réelle quelconque.

Mais ce n'est pas tout; il est évident que si le point a, b, a', b' est un point singulier essentiel, il en sera de même de tous les points

$$\alpha a+\beta b,\quad \gamma a+\delta b,\quad \alpha a'+\beta b',\quad \gamma a'+\delta b'$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Donc les points a, b, a', b' qui satisferont à l'équation

$$Q(z_0A,\ A,\ z_0A',\ A')=0$$

en posant

$$A=(\alpha a+\beta b)-z_0(\gamma a+\delta b),\quad A'=(\alpha a'+\beta b')-z_0(\gamma a'+\delta b')$$

seront encore des points singuliers essentiels. Or quand z_0 prend toutes les valeurs réelles possibles,

$$z_0'=\frac{\beta-z_0\delta}{\alpha-z_0\gamma}$$

prend aussi toutes les valeurs réelles possibles. Nous obtiendrons donc finalement les points singuliers essentiels à l'aide de l'équation

$$(7^{\text{bis}}.)\qquad Q[z_0(a-z_0'b),\ (a-z_0'b),\ z_0(a'-z_0'b'),\ (a'-z_0'b')]=0$$

où z_0 et z_0' sont deux constantes réelles quelconques.

Réciproquement, si l'on considère une suite indéfinie de systèmes de nombres entiers, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, on voit que quand on s'avancera indéfiniment dans cette suite, les différences

$$\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta},\ \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\alpha a+\beta b}{\gamma a+\delta b}-\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\alpha a'+\beta b'}{\gamma a'+\delta b'}-\frac{\alpha}{\gamma}$$

tendent vers zéro (j'exclus le cas où δ reste fini, cas où il conviendrait de

renverser tous les rapports précédents). On déduit de là que si le point a_1, b_1, a'_1, b'_1 est infiniment voisin d'une infinité de transformés du point a, b, a', b' on devra avoir:

$$\frac{a_1}{z_0\,(a-z'_0 b)} = \frac{b_1}{a-z'_0 b} = \frac{a'_1}{z_0\,(a'-z'_0 b')} = \frac{b'_1}{a'-z'_0 b'},$$

z_0 et z'_0 étant réels.

On peut en conclure ensuite que si le point a, b, a', b' ne satisfait ni aux équations (6.), ni à l'équation (7bis.), on peut trouver une limite supérieure de

$$H(a, b, a', b')\, b^{2m}\, b'^{2m} = H_1(a, b, a', b')$$

(qui est une fonction rationnelle homogène de degré zéro en a, b, a', b') ainsi que de toutes ses transformées:

$$H_1(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b').$$

D'où il suit que la série (5.) converge puisque la série

$$(8.) \qquad \Sigma\,(\gamma a+\delta b)^{-2m}\,(\gamma a'+\delta b')^{-2m}$$

est convergente. A vrai dire ce raisonnement semble supposer en outre que les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ ne sont pas réels, puisque dans le cas contraire la série (8.) ne convergerait pas, mais il serait aisé de remplacer dans l'expression de H_1 le facteur $b^{2m}\, b'^{2m}$ par

$$(\lambda b+\mu b')^{2m}\,(\lambda' b+\mu' b')^{2m}$$

et de choisir les constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ de telle façon que les rapports

$$\frac{\lambda a+\mu a'}{\lambda b+\mu b'},\ \frac{\lambda' a+\mu' a'}{\lambda' b+\mu' b'}$$

ne soient pas réels et par conséquent que la série

$$(8^{\text{bis}}.)\ \Sigma\,[\lambda\,(\gamma a+\delta b)+\mu\,(\gamma a'+\delta b')]^{-2m}\,[\lambda'(\gamma a+\delta b)+\mu'(\gamma a'+\delta b')]^{-2m}$$

converge.

La nature des points singuliers résulte de la discussion qui précède. Considérons l'espace à 8 dimensions où les coordonnées sont les parties réelle et imaginaire de a, b, a' et b'. Dans cet espace les points satisfaisant à une équation (6.) forment une variété à 6 dimensions, les points satisfaisant à une équation (7bis.) où z_0 et z'_0 sont réels, formeront en général

une variété à 8 dimensions. *Donc en général les points singuliers essentiels formeront des espaces lacunaires.*

Cependant il peut se faire que le 1er membre de (7bis.) puisse se mettre sous la forme:

$$Q'(z_0)\,Q''(a-z_0'b,\ a'-z_0'b')=0.$$

Dans ce cas l'équation (7bis.) peut se réduire à

$$Q''(a-z_0'b,\ a'-z_0'b')=0$$

et ne contient plus qu'un paramètre arbitraire réel z_0'. Dans ce cas, les points qui y satisfont forment une variété à 7 dimensions; de sorte que si l'on regarde par exemple b, a', b' comme donnés, les points singuliers essentiels dans le plan des a forment des lignes singulières et non des espaces lacunaires.

Dans le cas par exemple des invariants de la forme quadratique, H et par conséquent Q sont homogènes de même degré en a et b d'une part, en a' et b' d'autre part (de degré k par exemple); le 1er membre de (7bis.) se réduit alors à

$$Q(z_0, 1, z_0, 1)\,(a-z_0'b)^k\,(a'-z_0'b')^k$$

et l'équation (7bis.) s'écrit

$$(a-z_0'b)^k\,(a'-z_0'b')^k=0$$

ce qui montre que les points singuliers essentiels correspondent aux cas où $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a'}{b'}$ sont réels. Dans le cas où l'on a $Q(z_0, 1, z_0, 1)=0$, z_0 étant réel, c'est-à-dire si le dénominateur de H s'annule quand les deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ prennent une même valeur réelle, l'équation (7bis.) est toujours satisfaite, de sorte que la série ne converge jamais.

On est donc conduit à partager l'espace en 4 régions d'après le signe de la partie imaginaire de $\frac{a}{b}$ et de $\frac{a'}{b'}$. La série (3bis.) représente des fonctions différentes dans ces 4 régions; observons que de ces 4 régions la plus intéressante est celle où l'une des parties imaginaires est positive et l'autre négative; quand en effet, les deux rapports sont imaginaires conjugués, la forme quadratique devient réelle et définie. Ce que nous venons de dire s'applique à la série (3bis.); on obtient des résultats analogues pour la série (3ter.).

Soient $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ quatre séries de la forme (3bis.) le nombre m étant le même pour toutes les quatre. Existe-t-il en général entre elles une relation algébrique homogène

$$F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0 \,? \tag{9.}$$

Ce serait là une généralisation d'un théorème connu sur les séries thétafuchsiennes. Mais désignons par H_1, H_2, H_3, H_4 les fonctions rationnelles qui engendrent respectivement $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ et supposons que l'on ait

$$H_1 = \frac{H'_1}{(a - q_1 b)(a' - q_1 b')}, \quad H_2 = \frac{H'_2}{(a - q_2 b)(a' - q_2 b')}$$

où q_1 et q_2 sont des constantes, où H'_1, H'_2 sont des fonctions rationnelles qui ne deviennent ni nulles, ni infinies pour $\frac{a}{b} = q_1$, $\frac{a'}{b'} = q_2$, tandis que H_3 et H_4 sont d'ailleurs quelconques; nous supposerons seulement qu'elles ne deviennent ni nulles, ni infinies pour $\frac{a}{b} = q_1$, $\frac{a'}{b'} = q_2$.

Ordonnons la relation (9.) suivant les puissances de Θ_1 et Θ_2 et soit

$$A_{\mu\nu}\, \Theta_1^\mu\, \Theta_2^\nu$$

l'un des termes du développement, $A_{\mu\nu}$ étant un polynôme homogène en Θ_3 et Θ_4. Je distinguerai parmi ces termes ceux qui seront *d'ordre maximum*. Un terme en $\Theta_1^\mu\, \Theta_2^\nu$ sera d'ordre maximum s'il n'existe pas de terme en $\Theta_1^{\mu'}\, \Theta_2^{\nu'}$ tel que $\mu' > \mu$, $\nu' \geqq \nu$, ou $\mu' \geqq \mu$, $\nu' > \nu$.

Soit

$$q'_1 = \frac{\alpha q_1 + \beta}{\gamma q_1 + \delta}, \qquad q'_2 = \frac{\alpha' q_2 + \beta'}{\gamma' q_2 + \delta'}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$, mais qui correspondent à deux substitutions linéaires différentes.

Alors Θ_1 et Θ_2 deviennent infinis pour

$$\frac{a}{b} = q'_1, \qquad \frac{a'}{b'} = q'_2$$

et si l'on développe

$$\Theta_1\, b^{2m} b'^{2m}, \quad \Theta_2\, b^{2m} b'^{2m}$$

qui ne dépendent que des rapports $\frac{a}{b} = z$, $\frac{a'}{b'} = z'$, si l'on les développe, dis-je, suivant les puissances de $z - q'_1$ et $z' - q'_2$, on trouve

$$\Theta_1\, b^{2m} b'^{2m} = \frac{B_1}{z - q'_1} + V_1, \qquad \Theta_2\, b^{2m} b'^{2m} = \frac{B_2}{z' - q'_2} + V_2.$$

V_1 et V_2 ne devenant pas infinis et B_1 et B_2 représentant des constantes analogues aux résidus.

Si nous développons de même

$$F(\Theta_1 b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_2 b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_3 b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_4 b^{2m} b'^{2m})$$

suivant les puissances de $z-q'_1$, $z'-q'_2$, tous les termes du développement devront être nuls. Or si $A_{\mu\nu}\,\Theta_1^\mu\,\Theta_2^\nu$ est un terme d'ordre maximum, le coëfficient de

$$\frac{1}{(z-q'_1)^\mu\,(z'-q'_2)^\nu}$$

sera $A^0_{\mu\nu}$, en désignant par $A^0_{\mu\nu}$ ce que devient $A_{\mu\nu}$ quand on y fait

$$a=q'_1,\ b=1,\quad a'=q'_2,\ b'=1.$$

Donc $A^0_{\mu\nu}$ doit être nul; donc le rapport $\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$ doit être le même quand on y fait

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha q_1+\beta}{\gamma q_1+\delta},\qquad \frac{a'}{b'}=\frac{\alpha' q_2+\beta'}{\gamma' q_2+\delta'}$$

quels que soient les entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ \alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Et comme q_1 et q_2 sont quelconques, le rapport $\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$ ne doit pas changer quand a, b et a', b' subissent des substitutions linéaires à coëfficients entiers, *que ces substitutions soient identiques ou différentes.*

Comme il n'en est pas ainsi, c'est que la relation (9.) ne peut exister et *qu'il n'y a pas en général de relation algébrique entre les* Θ.

A l'aide des invariants obtenus par les séries (3bis.), on peut en obtenir d'autres en les combinant par addition, soustraction, multiplication et division. On peut également les combiner avec la fonction

$$a\,b'-a'\,b$$

qui est évidemment un invariant des deux formes linéaires et la racine carrée d'un invariant de la forme quadratique.

D'autre part, si J est un invariant des deux formes linéaires, il en est de même des expressions

$$a'\frac{dJ}{da}+b'\frac{dJ}{db},\qquad a\frac{dJ}{da'}+b\frac{dJ}{db'}.$$

Dans le cas particulier où

$$H(z)=\frac{1}{(z-q)(z'-q)},$$

l'invariant Θ formé à l'aide de la série (3bis.) satisfait à une équation différentielle remarquable, car

$$a'\frac{d\Theta}{da}+b'\frac{d\Theta}{db}$$

est un des invariants de la forme linéaire unique $ax+by$, invariants étudiés dans le § 2. Plus généralement si

$$H(z)=\frac{1}{(z-q)^m(z'-q)^m}$$

la même opération répétée m fois sur Θ conduit à un invariant de la forme linéaire unique $ax+by$.

Il est clair que si l'invariant J est homogène d'ordre m en a et b et d'ordre m' en a' et b', l'invariant $a'\frac{dJ}{da}+b'\frac{dJ}{db}$ sera homogène d'ordre $m-1$ en a et b et d'ordre $m'+1$ en a' et b'.

Soit maintenant A un invariant homogène d'ordre m en a et b et d'ordre m' en a' et b', m et m' étant positifs. Alors les dérivées d'ordre m par rapport à a et à b seront homogènes d'ordre 0, de sorte qu'en vertu du théorème des fonctions homogènes, on pourra poser

$$\frac{d^{m+1}A}{da^p\,db^{1+m-p}}=(-1)^{1+m-p}\,b^p\,a^{1+m-p}\,M(a,b,a',b')$$

et on constate aisément que M est encore un invariant arithmétique homogène d'ordre $-(m+2)$ en a et b et d'ordre m' en a' et b'. On posera de même

$$\frac{d^{m'+1}M}{da'^p\,db'^{1+m'-p}}=(-1)^{1+m'-p}\,b'^p\,a'^{1+m-p}\,N(a,b,a',b')$$

et on verrait que N est un invariant arithmétique homogène d'ordre $-(m+2)$ en a et b et d'ordre $-(m'+2)$ en a' et b'. Cela est l'équivalent de la relation entre les fonctions A envisagées au § 3 et les fonctions théta-fuchsiennes. On voit de combien de manières on peut déduire de nouveaux invariants de ceux que l'on connaît déjà.

On peut rattacher ces invariants à certaines fonctions qui sont apparentées aux fonctions elliptiques. Considérons en effet la série double

$$\Sigma H(x-ma-nb,\quad x'-ma'-nb')=F_{pq}(x,x')$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières possibles, et où H peut s'écrire:

$$H=\frac{1}{x^p x'^q},$$

p et q étant deux entiers positifs dont la somme est plus grande que 2. Si nous supposons d'abord $q=1$, nous voyons que la fonction F_{p1} satisfait à l'équation différentielle:

$$x'\frac{dF_{p1}}{dx}+a'\frac{dF_{p1}}{da}+b'\frac{dF_{p1}}{db}=\Sigma\frac{-p}{(x-ma-nb)^{p+1}}$$

dont le second membre est une fonction elliptique, et si q est >1, on a simplement:

$$\frac{dF_{p,q-1}}{dx'}=(1-q)F_{pq}\ .$$

La différence

$$F_{pq}(x,x')-\frac{1}{x^p x'^q}$$

se réduit pour $x=x'=0$ à l'un de nos invariants.

Observons encore que le produit

$$F_{pq}(x,x')\,\sigma^p(x,a,b)\,\sigma^q(x',a',b')$$

où $\sigma(x,a,b)$ représente la fonction σ de *Weierstrass* ayant pour périodes a et b, que ce produit, dis-je, reste fini pour toutes les valeurs des variables, (sauf bien entendu quand l'un des rapports $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a'}{b'}$ devient réel). Si l'on développe ce produit suivant les puissances de x et de x', les coëfficients du développement seront encore des invariants qui ne deviendront pas infinis.

Il résulte de cette rapide revue que les invariants des formes quadratiques présentent beaucoup plus de variété que ceux des formes linéaires, et cette variété se manifeste en particulier par la circonstance suivante. Dans la série (1.) du § 2, on ne pouvait donner à k une valeur fractionnaire; dans la série (4.) de ce § 4 au contraire, nous pouvons donner à s une valeur fractionnaire, au moins quand les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont imaginaires conjugués; la somme de la série reste un invariant. Cette circonstance a joué un rôle capital dans la démonstration de *Lejeune-Dirichlet* qui nous a servi de point de départ.

§ 5. *Relations avec les Fonctions Abéliennes.*

Les invariants des formes quadratiques présentent comme nous venons de le voir une grande variété; au lieu de l'invariant

$$J(s)=\Sigma\frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}$$

qui joue le rôle capital dans la démonstration de *Lejeune-Dirichlet* et qui correspond à la série (4.) du paragraphe précédent, on peut envisager la série

$$\Sigma\varphi(am^2+2bmn+cn^2)$$

où φ est une fonction quelconque, et en particulier:

$$F(q)=\Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'a fait *Lejeune-Dirichlet* lui-même (cf. Œuvres Complètes tome 1, page 467 à 469) et comme nous allons bientôt nous en rendre compte, cet invariant $F(q)$ aurait pu, tout aussi bien que $J(s)$ servir de point de départ à son analyse.

On voit d'ailleurs que ces deux invariants sont intimement liés l'un à l'autre; car on a la formule

$$(1.)\qquad \Gamma(s)J(s)=\int_0^\infty z^{s-1}[F(e^{-z})-1]\,dz.$$

D'un autre côté, $F(q)$ se rattache aux fonctions abéliennes, car la série

$$(2.)\qquad \Theta=\Sigma e^{i(mx+ny)}q^{am^2+2bmn+cn^2}$$

n'est autre chose que la célèbre fonction Θ, et il suffit pour retrouver $F(q)$ d'y faire $x=y=0$.

Nous avons besoin pour ce qui va suivre de savoir comment se comporte cette fonction pour q voisin de 1, et pour cela nous emploierons l'artifice suivant. La fonction Θ elliptique peut recevoir l'interprétation physique suivante. Soit une armille de longueur 2π, soit $f(x)$ la distribution de la température dans cette armille à l'instant $t=0$, x désignant l'arc compté sur l'armille à partir d'une certaine origine. Si l'on choisit convenablement les unités et si l'on prend $q=e^{-t}$, la distribution de la température à un instant quelconque sera représentée par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{2\pi}\Theta(x-z)\,dz.$$

Généralisons cette conception. Nous voyons d'abord que si nous posons $q=e^{-t}$, la série (2.) satisfait à l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{d\Theta}{dt}=a\frac{d^2\Theta}{dx^2}+2b\frac{d^2\Theta}{dx\,dy}+c\frac{d^2\Theta}{dy^2}. \tag{3.}$$

Elle représente donc la distribution de la température dans un plan formé d'une matière anisotrope c'est-à-dire où la conductibilité calorifique varie avec la direction. De plus cette distribution doit être périodique, car la fonction Θ ne change pas quand on augmente x ou y d'un multiple de 2π. Il est clair d'ailleurs que si cette periodicité existe à l'instant initial, elle subsistera toujours. De même, dans le cas de la fonction Θ elliptique, au lieu de considérer une armille fermée, nous aurions pu envisager une droite indéfinie, mais où la distribution initiale serait supposée périodique.

Revenons à la fonction Θ abélienne et cherchons quelle doit être la distribution initiale dans le plan. Soit d'une façon plus générale

$$f(x,y)=\Sigma A_{mn}e^{i(mx+ny)}$$

la distribution initiale; la distribution à un instant quelconque sera

$$f(x,y,t)=\Sigma A_{mn}e^{i(mx+ny)}q^{am^2+2bmn+cn^2}.$$

Or on a

$$A_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int f(u,v)e^{-i(mu+nv)}\,du\,dv$$

les intégrations étant effectuées de $u=0$ à $u=2\pi$ et de $v=0$ à $v=2\pi$. On a donc

$$f(x,y,t)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int f(u,v)\,\Theta(x-u,y-v)\,du\,dv.$$

Pour passer à la fonction Θ elle-même, il suffit de supposer que la fonction $f(u,v)$ est nulle sauf quand u et v sont nuls ou multiples de 2π, auquel cas elle est infinie.

Si l'on me permet de parler de quantité de chaleur au lieu de température afin d'énoncer le résultat plus facilement, je dirai:

Supposons qu'à l'instant $t=0$, il y ait une quantité de chaleur $4\pi^2$ concentrée à l'origine, ainsi qu'en chacun des points $x=2k\pi$, $y=2k'\pi$, la distribution de cette chaleur dans le plan à un instant ultérieur sera représentée par la fonction Θ.

Étudions cette distribution par une autre voie. Envisageons l'équation

$$\Theta = \int\int e^{-u^2-v^2} \varphi(\xi, \eta)\, du\, dv \tag{4.}$$

où l'intégration double est étendue au plan des uv tout entier et où l'on a posé:

$$\xi = x + \alpha u\sqrt{2t} + \beta v\sqrt{2t}, \qquad \eta = y + \gamma u\sqrt{2t} + \delta v\sqrt{2t}.$$

Il vient:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int\int e^{-u^2-v^2} \frac{du\, dv}{\sqrt{2t}} \left[u\left(\alpha\frac{d\varphi}{d\xi} + \gamma\frac{d\varphi}{d\eta}\right) + v\left(\beta\frac{d\varphi}{d\xi} + \delta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)\right],$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int\int e^{-u^2-v^2} \frac{du\, dv}{2t}\left(u\frac{d\varphi}{du} + v\frac{d\varphi}{dv}\right) = \int\int e^{-u^2-v^2} \frac{du\, dv}{4t}\left(\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{d^2\varphi}{dv^2}\right).$$

Donc si nous choisissons les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de telle façon que l'on ait identiquement

$$(\alpha x + \gamma y)^2 + (\beta x + \delta y)^2 = 2(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

la fonction Θ définie par l'équation (4.) satisfera à l'équation (3.); on aura d'ailleurs pour $t = 0$

$$\Theta = \varphi(x, y) \int\int e^{-u^2-v^2} du\, dv = \pi\varphi(x, y)$$

c'est donc $\pi\varphi(x, y)$ qui représente la distribution initiale.

Soit $\alpha\delta - \beta\gamma = E$, d'où $b^2 - ac = -\frac{1}{4}E^2$, il viendra

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{E^2 t}[a(y-\eta)^2 - 2b(x-\xi)(y-\eta) + c(x-\xi)^2] = P$$

et l'équation (4.) deviendra

$$\Theta = \int\int e^{-P} \varphi(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{2Et}. \tag{4bis.}$$

Maintenant, pour notre distribution initiale particulière, toute la chaleur doit être concentrée aux points

$$x = 2k\pi, \qquad y = 2k'\pi,$$

de sorte que $\varphi(\xi, \eta)$ est nulle partout, sauf en ces points où elle est infinie, la quantité de chaleur concentrée en chacun de ces points et représentée

par l'intégrale $\pi \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, devra être $4\pi^2$. Notre intégrale doit donc être remplacée par la série

$$\Theta = \Sigma \frac{2\pi}{Et} e^{-P} \tag{5.}$$

où

$$P = \frac{1}{E^2 t}[a(y-2k'\pi)^2 - 2b(y-2k'\pi)(x-2k\pi) + c(x-2k\pi)^2]$$

et où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs entières de k et de k'.

Si nous faisons $x=y=0$, nous voyons que pour t très grand, les exponentielles e^{-P} sont très petites, excepté celle qui correspond à $k=k'=0$ et qui se réduit à 1. On aura donc sensiblement

$$F(q) = \frac{2\pi}{Et}. \tag{5bis.}$$

Ainsi *pour des valeurs de q très voisines de* 1, *l'invariant $F(q)$ ne dépend que du déterminant de la forme quadratique.* C'est là une propriété analogue à celle de $J(s)$ dont *Lejeune-Dirichlet* a tiré le parti que l'on sait et *elle pourrait jouer le même rôle.*

En faisant $x=y=0$ dans la formule (5.), on trouve:

$$F(e^{-t}) = \frac{2\pi}{Et} F\left(e^{\frac{-4\pi^2}{E^2 t}}\right). \tag{6.}$$

Cela est vrai quelle que soit la forme $ax^2+2bxy+cy^2$, mais si elle est à coëfficients entiers, on a de plus

$$F(e^{-t-2i\pi}) = F(e^{-t}). \tag{7.}$$

En posant $t = 2i\pi u$ et $F(e^{-2i\pi u}) = \Phi(u)$, les équations (6.) et (7.) deviennent

$$\Phi(u) = \frac{-i}{Eu} \Phi\left(\frac{-1}{E^2 u}\right), \tag{6bis.}$$

$$\Phi(u+1) = \Phi(u). \tag{7bis.}$$

Ces équations nous montrent que $\Phi^2(u)$ est une fonction thétafuchsienne du groupe fuchsien engendré par les deux substitutions

$$(u, u+1), \qquad \left(u, -\frac{1}{E^2 u}\right).$$

L'étude de ce groupe fuchsien jetterait sans doute quelque lumière sur les propriétés arithmétiques des formes quadratiques. Bornons-nous à dire qu'il

est formé de deux séries de substitutions; à savoir les substitutions

$$u,\ \frac{\alpha u+\beta}{\gamma E^2 u+\delta};\qquad \alpha\delta-\beta\gamma E^2=1;\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ entiers}$$

et les substitutions

$$u,\ \frac{\alpha E u+\frac{\beta}{E}}{\gamma E u+\delta E}\qquad \alpha\delta E^2-\beta\gamma=1;\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ entiers.}$$

Les substitutions de la 1ère série forment une Congruenzgruppe qui est un sous-groupe d'indice 2 de notre groupe fuchsien.

Pour montrer les relations des considérations qui précèdent avec l'analyse de *Lejeune-Dirichlet*, nous choisirons un exemple simple. Dans ses œuvres complètes (Tome 1, page 468) l'illustre géomètre considère en particulier les formes proprement primitives de déterminant $\pm p$, p étant un nombre premier de la forme $4\nu+3$ et il démontre la formule suivante

$$\Sigma\Sigma q^P=2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)q^{nn'}. \tag{8.}$$

Dans le 1er membre P désigne une forme quadratique à indéterminées entières; et la double sommation s'étend d'une part à toutes les formes quadratiques proprement primitives de déterminant $-p$, non équivalentes; et d'autre part à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées qui ne rendent pas la forme P égale à un entier divisible par 2 ou par p. Dans le 2d membre la sommation s'étend à tous les entiers n et n' impairs et premiers à p.

Il en résulte que $2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)$ représente le nombre des représentations de l'entier nn' par les formes du système; la sommation doit être étendue à tous les diviseurs de nn'.

Cette formule peut être mise sous une forme plus commode. Soit en effet αp^m un nombre impair quelconque, α étant premier à p; je dis que le nombre des représentations est le même pour α et pour αp^m; en effet le nombre des représentations propres de α (c'est-à-dire des représentations telles que les deux indéterminées soient des entiers *premiers entre eux*) est égal au nombre des solutions de la congruence $x^2+p\equiv 0 \pmod{\alpha}$; le nombre *total* des représentations de α est égal à la somme des nombres des représentations propres des divers entiers $\frac{a}{k^2}$, k étant l'un des diviseurs carrés de α.

Le nombre des représentations propres de αp est égal au nombre des solutions distinctes de l'équation $\alpha pc - b^2 = p$, ou $\alpha pc - p^2\beta^2 = p$, ou $\alpha c - p\beta^2 = 1$ ou $p^2\beta^2 + p \equiv 0 \pmod{\alpha}$, ou $x^2 + p \equiv 0 \pmod{\alpha}$, puisqu'on a toujours un nombre β tel que $p\beta \equiv x \pmod{\alpha}$. C'est donc le nombre des représentations propres de α. Le nombre total des représentations de αp est égal à la somme des nombres de représentations de $\frac{\alpha p}{k^2}$, ou de $\frac{\alpha}{k^2}$ c'est-à-dire au nombre total des représentations de α.

Si nous considérons ensuite les nombres αp^{2q} et αp^{2q+1}, nous voyons qu'ils ne peuvent être représentés que si les deux indéterminées entières sont divisibles par p^q, de sorte que le nombre de leurs représentations est le même que pour α ou que pour αp, c'est-à-dire encore que pour α.

Dans ces conditions la formule (8.) peut se transformer de la façon suivante

$$(8^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma\Sigma q^P = 2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right) q^{nn'}.$$

L'écriture est la même, mais les sommations se font dans des conditions différentes. Dans le 1er membre, elles s'étendent non-seulement aux termes où P est impair et premier à p, mais à tous ceux où P est impair. De même dans le 2d membre, n est impair et premier à p, mais n' est seulement assujetti à être impair. Nous pouvons même supposer que n et n' sont l'un et l'autre assujettis seulement à être impairs, à la condition de poser

$$\left(\frac{n}{p}\right) = 0$$

pour n divisible par p.

Le second membre peut encore s'écrire:

$$2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

ou encore en appliquant la formule de la page 364 des œuvres complètes citées

$$\frac{2}{\sqrt{p}}\Sigma\Sigma \sin\frac{2an\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}} - \frac{2}{\sqrt{p}}\Sigma\Sigma \sin\frac{2bn\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

où a désigne un reste quadratique à p et b un non-reste, et où l'une des sommations s'étend à tous les nombres impairs n et l'autre à tous les restes ou non-restes a ou b. Quant au 1er membre il peut s'écrire:

$$\frac{1}{2}\Sigma F(q)-\frac{1}{2}\Sigma F(-q)$$

où $F(q)$ désigne notre invariant et où la sommation s'étend à toutes les formes de déterminant $-p$, proprement primitives et non équivalentes. Nous avons donc finalement

$$(9.)\quad \Sigma F(q)-\Sigma F(-q)=\frac{4}{\sqrt{p}}\Sigma \sin\frac{2an\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}-\frac{4}{\sqrt{p}}\Sigma \sin\frac{2bn\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Je n'ai écrit qu'un signe Σ dans le 2^d membre pour abréger l'écriture, mais ce signe simple doit être regardé comme équivalent au signe double défini plus haut.

Nous avons vu plus haut comment les formules (5.) et (6.) permettent d'évaluer $F(q)$. Disons quelques mots de $F(-q)$; nous pouvons supposer que l'on a choisi dans chaque classe, comme type de cette classe une forme quadratique dont les coëfficients extrêmes a et c sont tous deux impairs. Dans ces conditions la parité de l'exposant de q est la même que celle de $m+n$, il en résulte que nous avons, en partant de la série $\Theta(x, y)$ définie par l'équation (2.)

$$F(q)=\Theta(0,0),\qquad F(-q)=\Theta(\pi,\pi).$$

Reprenons donc la formule (5.) et faisons y successivement $x=y=0$, $x=y=\pi$, nous trouverons

$$(10.)\qquad F(q)=\Sigma\frac{2\pi}{Et}e^{-P},\quad F(-q)=\Sigma\frac{2\pi}{Et}e^{-P},$$

$$P=\frac{\pi^2}{E^2t}(a\mu^2-2b\mu\nu+c\nu^2)$$

où μ et ν désignent deux entiers pairs dans le cas de $F(q)$ et deux entiers impairs dans le cas de $F(-q)$.

Cela posé, reprenons l'égalité

$$\Sigma F(q)-\Sigma F(-q)=4\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

et faisons y t très voisin de 0, et par conséquent q très voisin de 1. Toutes les exponentielles e^{-P} deviendront très petites, à l'exception d'une seule qui figure dans $F(q)$ et qui correspond à $\mu=\nu=0$. Le 1er membre se réduit donc à

$$h\frac{2\pi}{Et}=\frac{\pi}{t\sqrt{p}}h$$

(h étant le nombre des classes), puisque

$$p = ac - b^2 = \frac{1}{4} E^2.$$

Passons au 2^d membre; on a sensiblement:

$$q^n = 1;\ 1 - q^{2n} = (1-q)\frac{dq^{2n}}{dq} = 2n(1-e^{-t})q^{2n-1} = 2nt.$$

Le 2^d membre se réduit donc à

$$\frac{2}{t}\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$$

d'où enfin

$$h = \frac{2\sqrt{p}}{\pi}\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}.$$

C'est la formule de *Lejeune-Dirichlet.*

Nous pouvons maintenant poser:

$$\varphi(u) = \Sigma \sin 2nu\pi \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

d'où

$$(9^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma F(q) - \Sigma F(-q) = \frac{4}{\sqrt{p}}\left[\Sigma\varphi\left(\frac{a}{p}\right) - \Sigma\varphi\left(\frac{b}{p}\right)\right]$$

et chercher à étudier et à transformer $\varphi(u)$. On trouve tout de suite

$$2i\varphi(u) = \Sigma e^{2inu\pi}\frac{q^n}{1-q^{2n}} - \Sigma e^{-2inu\pi}\frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

$$2i\varphi(u) = \Sigma e^{2inu\pi}q^{nn'} - \Sigma e^{-2inu\pi}q^{nn'},$$

$$2i\varphi(u) = \Sigma\frac{e^{2iu\pi}q^{n'}}{1-e^{4iu\pi}q^{2n'}} - \Sigma\frac{e^{-2iu\pi}q^{n'}}{1-e^{-4iu\pi}q^{2n'}}.$$

Sous cette forme, on voit que $\varphi(u)$ est une fonction doublement périodique admettant pour infinis:

$$u = \frac{k}{2} \pm \frac{n'it}{2\pi}$$

k étant entier et n' impair. J'ai mis le signe $\pm$ pour éviter toute ambiguité, le nombre n' ayant jusqu'ici été supposé positif.

Quant au résidu, il est égal à $+\frac{1}{8\pi}$, si k est pair et à $-\frac{1}{8\pi}$, si k est impair. Nous achèverons de déterminer la fonction $\varphi(u)$ en rappelant que

$\varphi(0)=0$. On a donc

$$8\pi\varphi(u)=\zeta(u-\omega')-\zeta(u-\omega-\omega')-\eta$$

en donnant à ω, ω', η leur signification habituelle dans la théorie des fonctions elliptiques et posant:

$$2\omega'=\frac{it}{\pi},\quad 2\omega=1,\quad q=e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}=e^{-t}.$$

Nous voyons ensuite que la fonction $\varphi(u)$ devient infinie pour

$$e^{\frac{2\pi^2 u}{t}}=-q_1^k,\quad q_1=e^{-\frac{\pi^2}{t}}$$

avec le résidu $\frac{1}{8\pi}$ pour k pair et $\frac{-1}{8\pi}$ pour k impair. Nous pouvons donc écrire, en posant pour abréger $e^{\frac{2\pi^2 u}{t}}=X$:

$$\varphi(u)=\frac{\pi}{4t}\,\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k}}-\frac{1}{1+Xq_1^{2k+1}}\Big)+\text{const.}$$

et comme la constante doit être telle que $\varphi(u)$ s'annule pour $u=0$, c'est-à-dire $X=1$:

$$(11.)\quad \frac{4t}{\pi}\,\varphi(u)=\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k}}-\frac{1}{1+q_1^{2k}}\Big)-\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k+1}}-\frac{1}{1+q_1^{2k+1}}\Big).$$

Cherchons d'abord l'expression du 2^{d} membre pour t très petit; nous voyons d'abord que q_1 tend vers 0 pour $t=0$; nous devons ensuite faire une distinction suivant que $a=pu$ est compris entre 0 est $\frac{p}{2}$, ou entre $\frac{p}{2}$ et p.

Dans le 1er cas X tend vers l'infini et Xq_1 vers zéro; dans le 2^{d} cas Xq_1 tend vers l'infini et Xq_1^2 vers zéro.

Envisageons alors les divers termes du 2^{d} membre. Dans le 1er cas

les termes en	q_1^{2k}	$(k<0)$	tendent vers		0
„ „ „	q_1^{2k}	$(k=0)$	„	„	$-\frac{1}{2}$
„ „ „	q_1^{2k}	$(k>0)$	„	„	0
„ „ „	q_1^{2k+1}	$(k<0)$	„	„	0
„ „ „	q_1^{2k+1}	$(k=0)$	„	„	0
„ „ „	q_1^{2k+1}	$(k>0)$	„	„	0.

De sorte qu'en définitive le second membre tend vers $-\frac{1}{2}$.

Dans le 2[d] cas, il n'y a de changement à faire que pour les termes en q_1^{2k+1}, $k=0$; ici Xq_1 tend vers l'infini, au lieu de tendre vers 0, et q_1 tend toujours vers zéro, de sorte que

$$\frac{1}{1+Xq_1}-\frac{1}{1+q_1}$$

tend vers -1 et non plus vers 0, et le second membre tend vers $+\frac{1}{2}$ et non plus vers $-\frac{1}{2}$. On a donc finalement

$$\frac{4t}{\pi}\varphi\left(\frac{a}{p}\right)=\pm\frac{1}{2}$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe − suivant que a est compris entre $\frac{p}{2}$ et p ou entre 0 et $\frac{p}{2}$.

Si alors dans la formule (9bis.) nous supposons t très petit, le 1er membre se réduit à $\frac{\pi h}{t\sqrt{p}}$, et le second à $\frac{\pi}{t\sqrt{p}}(A-B)$, A désignant le nombre des restes quadratiques et B celui des non-restes compris entre 0 et $\frac{p}{2}$. Nous retrouvons ainsi une formule de *Lejeune-Dirichlet.*

Si nous reprenons l'équation (11.) nous pourrons développer chacun des termes du 2[d] membre

$$\frac{1}{1+Xq_1^k}, \qquad \frac{1}{1+q_1^k}$$

suivant les puissances croissantes ou décroissantes de Xq_1^k ou q_1^k, suivant que Xq_1^k ou q_1^k est $<$ ou >1: excepté bien entendu pour le terme

$$\frac{1}{1+q_1^0}$$

qui est constant et égal à $\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions $\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$ va se trouver développé suivant les puissances de

$$X^{\pm 1}=e^{\pm\frac{2\pi^2 a}{pt}}=e^{\pm\frac{8\pi^2 a}{E^2 t}}, \qquad q_1=e^{-\frac{\pi^2}{t}}=\left(e^{-\frac{4\pi^2}{E^2 t}}\right)^p$$

c'est-à-dire en définitive suivant les puissances de $e^{-\frac{4\pi^2}{E^2 t}}$.

Il en est de même pour les mêmes raisons de $\varphi\left(\frac{b}{p}\right)$, et par conséquent du 2[d] membre de (9bis.). Il en est déjà de même du 1er membre par suite des formules (10.) et (10bis.).

En identifiant les deux développements, on trouverait de nouveaux théorèmes d'arithmétique.

§ 6. *Invariants des Formes Quadratiques Indéfinies.*

Il n'est pas possible, pour les formes quadratiques indéfinies de trouver des invariants, au sens que nous avons donné à ce mot jusqu'ici, c'est-à-dire des fonctions *continues* des coëfficients de la forme, et qui restent inaltérées quand la forme subit une transformation linéaire quelconque à coëfficients entiers, et cela quelle que soit la valeur entière ou fractionnaire du déterminant de la forme. Cela tient à ce que le groupe des transformations à coëfficients entiers qui est *proprement* discontinu, quand on prend pour variables les rapports des coëfficients d'une forme définie, ou ce qui revient au même les deux racines imaginaires conjuguées d'une équation du 2^d degré, n'est *qu'improprement* discontinu quand on prend pour variables les rapports des coëfficients d'une forme indéfinie, ou ce qui revient au même les deux racines réelles d'une équation du 2^d dégré (cf. pour la définition des groupes proprement et improprement discontinus, Acta Mathematica, tome 3, page 49).

En revanche pour un déterminant entier déterminé, et en se bornant aux formes à coëfficients entiers, en renonçant par conséquent à envisager des fonctions continues de ces coëfficients, on peut construire des invariants arithmétiques, c'est ce qu'a déjà fait *Lejeune-Dirichlet* dans le mémoire que j'ai cité.

Soit

$$am^2+2bmn+cn^2=F(m,n)$$

une forme quadratique indéfinie proprement primitive et à coëfficients entiers, de déterminant

$$b^2-ac=D>0.$$

On sait qu'il existe une infinité de solutions de l'équation de *Pell*

$$x^2-Dy^2=1$$

et que ces solutions peuvent s'obtenir par l'égalité

$$x\pm y\sqrt{D}=(t\pm u\sqrt{D})^\mu,$$

μ étant entier et $x=t$, $y=u$ étant la plus petite solution de l'équation de *Pell*. La forme quadratique peut alors être reproduite par une transformation linéaire à coëfficients entiers qui est la transformation

$[m, n;\ (t-bu)m-cun,\ aum+(t+bu)n]$ que j'appelle T.

On a en effet identiquement

$$(1.) \qquad F(m, n) = F[(t-bu)\,m - cun,\ aum + (t+bu)\,n]$$

Nous pouvons aussi présenter la chose sous une autre forme par l'introduction des nombres complexes. Soit en effet

$$x + y\sqrt{D}$$

un nombre complexe où $\sqrt{D}$ sera le symbole d'une unité complexe caractérisée par la loi de multiplication $\sqrt{D}\cdot\sqrt{D} = D$; nous aurons, par définition:

$$\text{norme } (x + y\sqrt{D}) = x^2 - y^2 D$$

et par conséquent:

$$\text{norme } (t + u\sqrt{D}) = 1$$

et quel que soit l'entier m positif ou négatif:

$$\text{norme } (t + u\sqrt{D})^m = 1.$$

De plus on aura

$$F(m, n) = \text{norme } \Big(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\Big).$$

Dans ces conditions l'équation (1.) signifie que l'on a également

$$F(m, n) = \text{norme } \Big[\Big(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\Big)(t + u\sqrt{D})\Big].$$

D'ailleurs nous pouvons plus généralement encore poser:

$$F(m, n) = \text{norme } \Big[\Big(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\Big)(\lambda + \mu\sqrt{D})\Big]$$

λ et μ étant deux constantes quelconques, entières ou non, telles que la norme du nombre complexe $\lambda + \mu\sqrt{D}$, c'est-à-dire que la quantité $\lambda^2 - D\mu^2$ soit égale à 1. Nous pouvons donc d'une infinité de manières mettre $F(m, n)$ sous la forme:

$$F(m, n) = \text{norme } [Am + Bn],$$

$A = \alpha + \alpha'\sqrt{D}$, $B = \beta + \beta'\sqrt{D}$ étant deux nombres complexes tels que

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Le nombre complexe $x+y\sqrt{D}$ pourra être représenté par le point dont les coordonnées rectangulaires sont x et y; et je suppose que ce point se trouve sur la droite

$$\frac{y}{x}=h$$

qui passe par l'origine et que j'appelle OA; le point qui représente le nombre $(x+y\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})$ sera alors sur la droite

$$\frac{y}{x}=h'$$

qui passe également par l'origine et que j'appelle OA'; les droites OA et OA' forment un faisceau homographique dont les droites doubles sont les droites

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{D}}$$

que j'appelle OB et OB'. Ces deux droites doubles partagent le plan en quatre angles, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$; dans deux de ces angles Ω_1 et Ω_3 opposés par le sommet, la norme de $x+y\sqrt{D}$ est positive, dans les deux autres elle est négative.

Soit OA_0 une demi-droite partant de l'origine et située dans l'angle Ω_1; soit OA_1 la transformée de OA_0 par la transformation homographique qui change OA en OA', soit OA_2 la transformée de OA_1, OA_3 celle de $OA_2, \ldots OA_0$ celle de OA_{-1}, OA_{-1} celle de $OA_{-2}, \ldots$: les différentes droites OA_k, où l'indice k prend toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, vont diviser l'angle Ω_1 en une infinité d'angles partiels. Et si l'on considère l'un de ces angles partiels et qu'on le transforme par la transformation homographique en question, ou par l'une de ses puissances, ou par une puissance de son inverse, on obtiendra successivement tous les angles partiels. Nous appellons ω_0 l'angle partiel compris entre OA_0 et OA_1, en y comprenant la demi-droite OA_0, mais sans y comprendre la demi-droite OA_1. Il est clair alors que si $x+y\sqrt{D}$ prend toutes les valeurs complexes représentées par un point intérieur à ω_0, et k toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles, le nombre complexe

$$(x+y\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})^k$$

prendra toutes les valeurs représentées par un point intérieur à Ω_1.

On opérerait de même sur les 3 autres angles $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. Observons maintenant que d'après les formules précédentes

$$\left(\frac{am+bn}{\sqrt{a}}+\frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(\lambda+\mu\sqrt{D})\,(t+u\sqrt{D})=(Am+Bn)\,(t+u\sqrt{D})$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left(\frac{am'+bn'}{\sqrt{a}}+\frac{n'}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(\lambda+\mu\sqrt{D})=Am'+Bn'$$

en posant:

$$m'=(t-bu)m-cun, \qquad n'=aum+(t+bu)n.$$

La transformation linéaire

$$V=\begin{vmatrix} t-bu & -cu \\ au & t+bu \end{vmatrix}$$

qui lie m' et n' à m et à n est à coëfficients entiers, *pourvu que la forme quadratique* $F(m, n)$ *ait ses coëfficients entiers.*

Considérons les divers points représentatifs des divers nombres complexes

$$Am+Bn,$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières. Ces points formeront un *réseau* analogue à celui qu'on obtient quand on partage le plan en une infinité de parallélogrammes égaux, et qui est formé par les différents sommets de ces parallélogrammes. Les points du réseau peuvent d'une infinité de manières se distribuer en une infinité de *files* parallèles.

Il résulte de ce qui précède que les transformés des divers points du réseau par la transformation homographique définie plus haut et qui correspond à la transformation linéaire V, que ces transformés, dis-je, appartiennent encore au réseau, mais à une condition, c'est que la forme $F(m, n)$ ait ses coëfficients entiers.

D'autre part nous avons vu que le plan peut être partagé en quatre angles $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$; que Ω_1 se partage en une infinité d'angles partiels $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n, \ldots \omega_{-1}, \ldots \omega_{-n}, \ldots$; transformés les uns des autres par la transformation homographique. On peut partager de même $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ et désigner par $\omega_i', \omega_i'', \omega_i'''$ les divers angles analogues à ω_i formés respectivement dans Ω_2, Ω_3 et Ω_4.

Cela posé, soit $\varphi(x)$ une fonction uniforme quelconque de x; formons la série

$$\Sigma\varphi[F(m,n)]$$

et étendons la sommation à tous les points du réseau intérieurs à l'angle ω_0. Si la série en question converge, elle représente un invariant, *pourvu que les coëfficients de* $F(m,n)$ *soient entiers*, et cette condition suffit pour distinguer ce nouvel invariant de ceux dont il a été question dans les paragraphes précédents.

Toujours à la même condition, la valeur de la série est indépendante de la position de la demi-droite OA_0.

Nous aurions pu étendre la sommation outre l'angle ω_0, à l'angle ω_0'. Il est inutile de l'étendre aux angles ω_0'' et ω_0'''; on ne ferait ainsi que doubler la somme de la série, puisque les angles ω_0 et ω_0'', ω_0' et ω_0''' sont opposés par le sommet et que $\varphi[F(m,n)]$ ne change pas quand on change m et n en $-m$ et $-n$. En général nous nous bornerons à étendre la sommation à l'angle ω_0; celà revient au même d'ailleurs que d'étendre la sommation aux angles ω_0 et ω_0' et de supposer que la fonction $\varphi(x)$ est nulle pour $x<0$.

En général nous supposerons

$\varphi(x)=\frac{1}{x^s}$ pour $x>0$, $\varphi(x)=0$ pour $x<0$ et nous définirons un invariant

$$J(s)=\Sigma\frac{1}{F^s}$$

convergeant pourvu que $s>1$ et analogue à ceux des paragraphes précédents. *Lejeune-Dirichlet* ne fait pas tout à fait comme cela; il prend

$\varphi(x)=\frac{1}{x^s}$ pour x entier, positif et impair,

$\varphi(x)=0$ pour x entier, positif et pair et pour x négatif.

La valeur de $\varphi(x)$ pour x non-entier peut être quelconque, puisque $F(m,n)$ est toujours entier. Il forme ainsi un invariant que nous appellerons $J_1(s)$.

Dans l'article que j'ai inséré au Bulletin de l'Association Française (Congrès d'Alger 1881, j'en ai introduit un autre) j'envisage le nombre imaginaire λ défini par l'équation

$$(t+u\sqrt{D})^\lambda=1,$$

j'envisage le nombre complexe $Am+Bn$, et le nombre conjugué A_0m+B_0n qui se déduit du premier en changeant $\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$, de telle sorte que

$$(Am+Bn)(A_0m+B_0n)=F(m,n)$$

et je forme la série

$$\Sigma(Am+Bn)^{-s+\lambda}(A_0m+B_0n)^{-s-\lambda}$$

étendue à l'angle ω_0.

C'est un invariant des deux formes linéaires simultanées $Am+Bn$ et A_0m+B_0n.

Il me reste à définir les limites de l'angle ω_0; nous pouvons les exprimer par les inégalités

$$(2.)\qquad n\geqq 0,\ aum+(t+bu)n<0$$

ou plus généralement puisque la position de la droite OA_0 est indifférente, par les inégalités

$$(2^{\text{bis}}.)\qquad \begin{cases} \mu(am+bn)+\lambda n\geqq 0, \\ (\lambda u+\mu t)(am+bn)+(\lambda t+\mu u D)n<0 \end{cases}$$

λ et μ étant deux quantités réelles quelconques.

Nous préférerons dans la suite définir $\varphi(x)$ d'une autre façon. Nous prendrons soit

$$\varphi(x)=q^x \text{ pour } x\geqq 0,\ \varphi(x)=0 \text{ pour } x<0$$

ce qui nous fournira un invariant que nous appellerons $F(q)$ soit

$\varphi(x)=q^x$ pour x entier positif impair,

$\varphi(x)=0$ pour x entier positif pair, ou pour x négatif

ce qui nous fournira un second invariant que nous appellerons $F_1(q)$. Nous aurons d'ailleurs comme au § 5

$$\Gamma(s)J(s)=\int_0^\infty z^{s-1}[F(e^{-z})-1]dz,$$

$$\Gamma(s)J_1(s)=\int_0^\infty z^{s-1}F_1(e^{-z})dz.$$

Nous sommes ainsi conduits à examiner les séries

$$(3.)\qquad \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2}x^m y^n$$

tout à fait analogues à celles que l'on envisage dans la théorie des fonctions *Abéliennes*, mais où la forme $am^2+2bmn+cn^2$ est indéfinie. La série étendue à toutes les valeurs entières de m et de n serait divergente; elle convergera au contraire si l'on se borne aux valeurs de m et de n qui satisfont aux inégalités (2.) Au lieu de la série (3.) envisageons la série

$$(3^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma \varepsilon_{mn} q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n,$$

le nombre ε_{mn} étant égal tantôt à $+1$, tantôt à -1; à savoir:

$$\varepsilon_{mn}=+1 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n \geqq 0,$$
$$\varepsilon_{mn}=-1 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n<0.$$

Cette série ne sera pas convergente, mais nous la désignerons par

$$H(x, y; \lambda, \mu)$$

car elle dépend évidemment du choix des constantes réelles λ, μ.

Si nous envisageons maintenant la différence

$$H(x, y; \lambda, \mu)-H(x, y; \lambda', \mu')$$

ce sera encore une série de la forme (3bis.), mais où le coëfficient ε_{mn} aura pour valeurs

$$\varepsilon_{mn}=2 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n \geqq 0, \quad \lambda' m+\mu' n<0$$
$$\varepsilon_{mn}=0 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n \geqq 0, \quad \lambda' m+\mu' n \geqq 0$$
$$\varepsilon_{mn}=-2 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n<0, \quad \lambda' m+\mu' n \geqq 0$$
$$\varepsilon_{mn}=0 \quad \text{si} \quad \lambda m+\mu n<0, \quad \lambda' m+\mu' n<0.$$

Cette fois la série peut être convergente et c'est ce qui arrive en particulier si nous prenons

$$\lambda=0, \ \mu=1; \quad \lambda'=au, \ \mu'=t+bu;$$

de façon à retrouver les inégalités (2.).

Envisageons le terme général de nos séries (3.) et (3bis.)

$$q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n=\psi(x, y; m, n).$$

Si l'on change x et y en xq^{2a} et yq^{2b} et qu'on multiplie par xq^a, c'est comme si l'on changeait m en $m+1$; de sorte qu'on aura

$$xq^a \psi(xq^{2a}, yq^{2b}; m, n)=\psi(x, y; m+1, n)$$

et de même

$$yq^c\,\psi(xq^{2b}, yq^{2c}; m, n) = \psi(x, y; m, n+1)$$

et plus généralement α et β étant deux entiers quelconques:

$$(4.)\quad \psi(x, y; m+\alpha, n+\beta) = x^\alpha y^\beta q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2}\,\psi(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; m, n).$$

Dans ces conditions, comparons les deux séries

$$(5.)\quad H(x, y; \lambda, \mu),\ x^\alpha y^\beta q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2}\,H(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; \lambda, \mu);$$

la première s'écrit

$$\Sigma\,\varepsilon_{mn}\,\psi(x, y; m, n)$$

et la seconde

$$\Sigma\,\varepsilon_{mn}\,\psi(x, y; m+\alpha, n+\beta).$$

Les termes correspondants des deux séries sont les mêmes si

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta}$$

c'est-à-dire si les deux quantités

$$(6.)\qquad \lambda m+\mu n, \qquad \lambda(m+\alpha)+\mu(n+\beta)$$

sont toutes deux négatives, ou ne le sont ni l'une ni l'autre.

Si nous supposons d'abord

$$\lambda\alpha+\mu\beta = 0$$

les deux conditions seront satisfaites en même temps et l'on aura

$$H(x, y; \lambda, \mu) = q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2}\,H(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; \lambda, \mu)\,x^\alpha y^\beta.$$

Supposons ensuite que λ et μ soient deux entiers premiers entre eux, de même que α et β et que l'on ait

$$\lambda\alpha+\mu\beta = 1.$$

Dans ce cas la différence des deux expressions (6.) sera égale à 1, les nombres ε_{mn} et $\varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta}$ seront égaux à moins que

$$\lambda(m+\alpha)+\mu(n+\beta) = 0, \qquad \lambda m+\mu n = -1 < 0.$$

Alors on a

$$\varepsilon_{mn} = -1 \qquad \varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta} = 1.$$

La différence des deux séries (5.) est donc

$$(7.)\qquad 2\Sigma\,\psi(x, y; m, n)$$

en donnant à m et n toutes les valeurs entières telles que

$$\lambda m + \mu n = 0.$$

C'est (au facteur 2 près) une série analogue à la série (3.), mais où la sommation au lieu d'être étendue à tous les sommets du *réseau*, l'est seulement à une *file* de ce réseau.

Or qu'est ce qu'une pareille série; considérons la série

$$(8.) \qquad \Sigma \psi(x, y; m_0 + \mu t, n_0 - \lambda t)$$

où m_0 et n_0 représentent deux entiers fixes et où t peut prendre toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Les points $m_0 + \mu t$, $n_0 - \lambda t$ constitueront une *file*; et l'on aura

$$\lambda (m_0 + \mu t) + \mu (n_0 - \lambda t) = \text{const.}$$

D'ailleurs la série (8.) peut s'écrire

$$x^{m_0} y^{n_0} \Sigma A q^{ht^2 + kt} X^t$$

où

$$A = q^{am_0^2 + 2bm_0n_0 + cn_0^2}; \qquad h = a\mu^2 - 2b\lambda\mu + c\lambda^2;$$

$$k = 2am_0\mu - 2cn_0\lambda + 2b(n_0\mu - m_0\lambda)$$

sont des constantes et où

$$X = x^{\mu} y^{-\lambda}$$

est la nouvelle variable indépendante. C'est au facteur simple près $x^{m_0} y^{n_0}$, une *série théta elliptique* par rapport à la variable $\log X$.

Ainsi *la différence des deux séries* (5.) *s'exprime par les fonctions elliptiques.*

Soit maintenant $\lambda\alpha + \mu\beta$ quelconque; nous supposons toujours λ et μ entiers et premiers entre eux. Il arrive encore que ε_{mn} et $\varepsilon_{m+\alpha, n+\beta}$ sont égaux, sauf quand l'une des deux expressions (6.) est négative sans que l'autre le soit. Les points m, n pour lesquels cette dernière circonstance se présente forment un nombre fini de *files parallèles* du réseau. Ainsi la différence des deux séries (5.) ne sera autre chose que la série (7.) étendue à un nombre fini de files parallèles. Elle s'exprimera donc encore par les séries théta elliptiques.

Prenons maintenant comme nous l'avons dit plus haut

$$\lambda = 0, \ \mu = 1; \qquad \lambda' = au, \ \mu' = t + bu.$$

La série

$$\Theta(x, y) = H(x, y;\ \lambda, \mu) - H(x, y;\ \lambda', \mu')$$

est alors convergente; et nous avons d'ailleurs en faisant $\alpha = 1, \beta = 0$

$$\begin{aligned} & xq^a\,\Theta(xq^{2a}, yq^{2b}) - \Theta(x, y) \\ &= xq^a\,H(xq^{2a}, yq^{2b};\ \lambda, \mu) - H(x, y;\ \lambda, \mu) \\ &- xq^a\,H(xq^{2a}, yq^{2b};\ \lambda', \mu') + H(x, y;\ \lambda', \mu'). \end{aligned}$$

La différence

$$xq^a\,\Theta(xq^{2a}, yq^{2b}) - \Theta(x, y)$$

s'exprime donc par les séries théta elliptiques et il en est de même pour la même raison de la différence

$$yq^c\,\Theta(xq^{2b}, yq^{2c}) - \Theta(x, y).$$

L'exemple le plus simple est celui où

$$a = c = 1, \qquad b > 0$$

d'où

$$t = b, \quad u = -1, \quad D = b^2 - 1.$$

Les inégalités (2.) deviennent alors

$$n \geqq 0, \qquad -m < 0$$

d'où

$$\Theta(x, y) = H(x, y;\ 0, 1) - H(x, y;\ -1, 0)$$

ou bien

$$\Theta(x, y) = 2\Sigma q^{m^2+2bmn+n^2} x^m y^n - 2\Sigma q^{m^2+2bmn+n^2} x^m y^n$$

la 1ère sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que

$$m > 0, \qquad n \geqq 0$$

et la 2de à toutes les valeurs telles que

$$n < 0, \qquad m \leqq 0.$$

Quand m et n sont de même signe, le terme correspondant figure sous le 1er signe Σ si ce signe est positif, et sous le 2d s'il est négatif. On trouve encore sous le 1er signe Σ les termes où $n = 0$, $m > 0$, et sous le 2d ceux où $m = 0$, $n < 0$; le terme $m = n = 0$ ne figure nulle part.

On trouve ensuite

$$x^{-1} q\, \Theta(xq^{-2}, yq^{-2b}) - \Theta(x, y) = 2\Sigma q^{n^2} y^n \tag{9.}$$

et

$$yq\, \Theta(xq^{2b}, yq^2) - \Theta(x, y) = -2\Sigma q^{m^2} x^m. \tag{9^bis.}$$

On voit que les seconds membres

$$\Sigma q^{n^2} y^n, \quad \Sigma q^{m^2} x^m$$

sont les fonctions Θ elliptiques ordinaires.

Nous sommes amenés à nous demander si l'on peut construire une fonction Ω jouissant de la double propriété

$$\begin{cases} xq\,\Omega(xq^2, yq^{2b}) = \Omega(x, y), \\ yq\,\Omega(xq^{2b}, yq^2) = \Omega(x, y) \end{cases} \tag{10.}$$

c'est-à-dire satisfaisant aux conditions que l'on obtiendrait en privant les équations (9.) et (9bis.) de leurs seconds membres.

Les équations (10.) entraînent la suivante

$$x^\alpha y^\beta q^{\alpha^2+2b\alpha\beta+\beta^2}\, \Omega(xq^{2\alpha+2b\beta}, yq^{2b\alpha+2\beta}) = \Omega(x, y)$$

qui donnent pour $\alpha = 1$, $\beta = -b$

$$xy^{-b} q^{-D}\, \Omega(xq^{-2D}, y) = \Omega(x, y)$$

et pour $\alpha = -b$, $\beta = 1$

$$x^{-b} yq^{-D}\, \Omega(x, yq^{-2D}) = \Omega(x, y).$$

Posons

$$x = \xi y^{+b}; \qquad \Omega(\xi y^{+b}, y) = \Omega_0(\xi, y).$$

Les équations précédentes deviendront

$$\xi^\alpha y^{\beta+\alpha b}\, q^{\alpha^2+2b\alpha\beta+\beta^2}\, \Omega_0(\xi q^{-2D\alpha}, yq^{2b\alpha+2\beta}) = \Omega_0(\xi, y)$$

ou

$$\xi^\alpha y^\gamma\, q^{\gamma^2-D\alpha^2}\, \Omega_0(\xi q^{-2D\alpha}, yq^{2\gamma}) = \Omega_0(\xi, y). \tag{10^bis.}$$

Il suffira de prendre

$$\Omega_0 = \Theta_1(\xi)\, \Theta_2(y)$$

en appelant Θ_1 et Θ_2 les fonctions d'une seule variable qui satisfont aux conditions

$$\xi q^{-D}\, \Theta_1(\xi q^{-2D}) = \Theta_1(\xi),$$
$$yq\, \Theta_2(yq^2) = \Theta_2(y).$$

La seconde est la fonction Θ elliptique

$$\Theta_2(y) = \Sigma q^{n^2} y^n$$

qui figure précisément dans les 2ds membres des équations (9.) et (9bis.). La 1ère est définie par une équation fonctionnelle analogue, mais où la quantité qui joue le rôle de q est de module >1.

Il n'y a donc pas de fonction entière qui y satisfasse, mais on peut prendre

$$\Theta_1(\xi) = \frac{1}{\Sigma q^{Dm^2} \xi^m} = \frac{1}{\eta(\xi)}.$$

$\Omega(x, y)$ étant ainsi défini, si nous posons:

$$\frac{\Theta(x, y)}{\Omega(x, y)} = \Phi(x, y),$$

les équations (9.) et (9bis.) deviendront:

$$(11.)\begin{cases} \Phi(xq^{-2}, yq^{-2b}) - \Phi(x, y) = \dfrac{2}{\Theta_1(\xi)} = 2\Sigma q^{Dm^2} x^m y^{-bm} = 2\eta(xy^{-b}), \\ \Phi(xq^{2b}, yq^2) - \Phi(x, y) = \dfrac{-2\Theta_2(x)}{\Theta_1(\xi)\Theta_2(y)} = \dfrac{-2\Theta_2(x)\eta(xy^{-b})}{\Theta_2(y)}. \end{cases}$$

Si nous posons pour abréger

$$\Phi(xq^{-2}, yq^{-2b}) = \Phi(x, y)S; \qquad q^{-D}x^{-1}y^b = A$$
$$\Phi(xq^{2b}, yq^2) = \Phi(x, y)S'; \qquad q^{-D}x^{-b}y = B$$

ces équations donneront aisément:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Phi S^2 - (1+A)\Phi S + A\Phi = 0, \\ \Phi SS' - \Phi S - \Phi S' + \Phi = 0, \\ \Phi S'^2 - (1+B)\Phi S' + B\Phi = 0. \end{cases}$$

Ces propriétés montrent suffisamment que la fonction $\Theta(x, y)$, bien qu'elle soit une transcendante nouvelle, est apparentée aux fonctions elliptiques. Nous avons considéré une forme quadratique $F(m, n)$ assez particulière; mais on aurait des résultats analogues avec une forme quadratique quelconque.

Remarquons que si l'on fait croître b indéfiniment, et tendre q vers 1 de telle façon que $q^b = q'$ demeure constant, on trouverait à la limite la série

$$2\Sigma \pm q'^{2mn} x^m y^n$$

m et n étant toujours assujettis aux mêmes conditions, et l'on reconnaîtrait un développement connu de la fonction doublement périodique de 2^{d} espèce (cf. *Halphen*, Traité des Fonctions Elliptiques, tome 1, chapitre XIII).

Revenons au cas où la forme $F(m, n)$ est une forme quadratique quelconque indéfinie à coëfficients entiers. Voyons quelle relation cette transcendante $\Theta(x, y)$ peut avoir avec nos invariants arithmétiques. Supposons que l'on donne à x et à y des valeurs particulières qui soient des racines p^{es} de l'unité.

Notre série s'écrit:

$$\Theta(x, y) = H(x, y; 0, 1) - H(x, y; au, t+bu)$$

ou

$$\Theta(x, y) = 2\Sigma \pm q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n$$

où l'on ne prend que les points m, n situés dans l'angle ω_0 défini par les inégalités (2.) ou dans l'angle opposé par le sommet; à savoir avec le signe + pour l'angle ω_0 et avec le signe − pour l'angle opposé.

Pour retrouver notre invariant $F(q)$, il suffirait de supprimer les termes affectés du signe − et de faire $x = y = 1$. Dans ce cas, nous pourrions comme nous l'avons dit plus haut sans changer la valeur de la série, remplacer l'angle ω_0 défini par les inégalités (2.) par l'angle analogue défini par les inégalités (2bis.).

Cela tient à ce que si l'on pose

$$m' = (t - bu)m - cun,$$
$$n' = aum + (t + bu)n$$

on a

$$q^{am^2+2bmn+cn^2} = q^{am'^2+2bm'n'+cn'^2}.$$

Mais comme on n'aura pas en même temps, en général

$$x^m y^n = x^{m'} y^{n'} \tag{13.}$$

on changerait au contraire la valeur de $\Theta(x, y)$ en substituant les inégalités (2bis.) aux inégalités (2.).

Si x et y sont des racines p^{es} de l'unité, la condition (13.) sera remplie pourvu que l'on ait

$$m \equiv m', \; n \equiv n' \pmod{p}$$

ou bien

$$t \equiv 1, \; u \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cette dernière condition ne sera pas remplie en général quand t et u seront comme nous l'avons supposé jusqu'ici, les *plus petits* nombres entiers qui satisfont à l'équation de *Pell*. Mais si nous posons:

$$(t+u\sqrt{D})^{\mu}=t_{\mu}+u_{\mu}\sqrt{D}$$

nous pouvons toujours choisir μ de telle façon que

$$t_{\mu}\equiv 1,\ u_{\mu}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Nous pourrons alors remplacer l'angle ω_0 par l'angle

$$\omega_0^{\mu}=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{\mu-1}$$

formé de l'angle ω_0 et de ses $\mu-1$ premiers transformés par la transformation homographique envisagé plus haut.

On a alors une fonction $\Theta_{\mu}(x,y)$ analogue à $\Theta(x,y)$ et définie par l'égalité

$$\Theta_{\mu}(x,y)=H(x,y;\ 0,1)-H(x,y;\ au_{\mu},t_{\mu}+bu_{\mu}).$$

On peut alors pourvu que x et y soient des racines p^{es} de l'unité, remplacer les inégalités qui définissent l'angle ω_0^{μ} et qui sont analogues aux inégalités (2.) par d'autres inégalités analogues aux inégalités (2bis.). On a ainsi en désignant par λ et λ' des constantes réelles quelconques

$$\Theta_{\mu}(x,y)=H(x,y;\ \lambda' a,\lambda' b+\lambda)-H(x,y;\ \lambda_1' a,\lambda_1' b+\lambda_1)$$

en posant

$$\lambda_1'=\lambda u_{\mu}+\lambda' t_{\mu};\ \lambda_1=\lambda t_{\mu}+\lambda' u_{\mu} D.$$

Mais il importe d'examiner de plus près ce que c'est que $\Theta_{\mu}(x,y)$.

Soit

$$x=e^{\frac{2i\pi\xi}{p}},\quad y=e^{\frac{2i\pi\eta}{p}},\quad z=e^{\frac{2i\pi}{p}}$$

ξ et η étant deux entiers; nous aurons

$$x^m y^n=z^M,\qquad x^{m'}y^{n'}=z^{M'}$$

où

$$M=\xi m+\eta n;\qquad M'=\xi m'+\eta n'=\xi_1 m+\eta_1 n$$

en posant

$$\xi_1=\xi(t-bu)+au\eta;\qquad \eta_1=-cu\xi+\eta(t+bu)$$

et si nous posons de même

$$\xi_2=\xi_1(t-bu)+au\eta_1;\qquad \eta_2=-cu\xi_1+\eta_1(t+bu)$$

et ainsi de suite et de plus

$$x_k = z^{\xi k}, \qquad y_k = z^{\eta k};$$

nous aurons manifestement

$$\Theta_\mu(x, y) = \Theta(x, y) + \Theta(x_1, y_1) + \Theta(x_2, y_2) + \cdots + \Theta(x_{\mu-1}, y_{\mu-1}).$$

Mais il reste à voir si $\Theta_\mu(x, y)$ n'est pas identiquement nul. Si nous supposons $p = 2$, de telle façon que x et y soient égaux à ± 1, il en sera certainement ainsi, car les termes en

$$x^m y^n, \qquad x^{-m} y^{-n}$$

se détruiront.

Supposons donc que p soit un nombre premier impair ne divisant pas D, et que D soit reste quadratique à p de telle sorte que

$$D \equiv \lambda^2 \pmod{p}.$$

Posons

$$t + \lambda u \equiv \alpha, \qquad t - \lambda u \equiv \alpha^{-1} \qquad \pmod{p}.$$

Si l'on convient d'écrire

$$t_k + \sqrt{D}\, u_k = (t + u\sqrt{D})^k,$$

il en résultera

$$t_k + \lambda u_k \equiv \alpha^k, \qquad t_k - \lambda u_k \equiv \alpha^{-k} \qquad \pmod{p}$$

(J'écris bien entendu α^{-k} au lieu de α^{p-1-k} à cause du theorème de *Fermat* $\alpha^{p-1} \equiv 1$).

Cela posé nous avons

$$\xi_k = \xi(t_k - b u_k) + a u_k \eta; \qquad \eta_k = -c u_k \xi + \eta(t_k + b u_k)$$

et si l'on pose

$$M_k = \xi_k m + \eta_k n$$

il viendra

$$M_k \equiv A\alpha^k + A'\alpha^{-k} \qquad \pmod{p}$$

où A et A' sont des formes à coëfficients entiers doublement linéaires d'une part par rapport à m et n, d'autre part par rapport à ξ et η.

On vérifierait aisément en construisant effectivement ces formes, que l'on peut choisir m et n de façon que A et A' prennent des valeurs quelconques (par rapport au module p) et cela, quels que soient ξ et η, pourvu que $c\xi^2 - 2b\xi\eta + a\eta^2$ ne soit pas divisible par p. De même on peut choisir

ξ et η de façon que A et A' aient des valeurs quelconques pourvu que $am^2+2bmn+cn^2$ ne soit pas divisible par p.

Cela posé quel va être dans $\Theta_\mu(x, y)$ le coëfficient du terme en

$$q^{am^2+2bmn+cn^2}?$$

Cela va être

$$2\Sigma z^{M_k} - 2\Sigma z^{-M_k}$$

ou

$$4i\Sigma \sin\left(\frac{2\pi}{p} M_k\right).$$

On doit donner à k sous le signe Σ toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $\mu-1$; (μ étant le premier entier tel que $\alpha^\mu \equiv 1 \mod p$).

Si α est une racine primitive, ou plus généralement, toutes les fois que $\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$, on a

$$\alpha^k \equiv -\alpha^{k+\frac{p-1}{2}}, \qquad \alpha^{-k} \equiv -\alpha^{-k-\frac{p-1}{2}}$$

de sorte que

$$M_k \equiv -M_{k+\frac{p-1}{2}},$$

et que la somme des sinus est nulle, et Θ_μ identiquement nul.

Supposons au contraire $\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, et soit par exemple

$$\alpha = 2, \qquad p = 7, \qquad \alpha^3 \equiv 1$$

la somme des sinus devient

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$$

et n'est pas nulle.

Nous pouvons aussi envisager le cas où

$$t \equiv 1, \quad u \equiv 0 \pmod p, \quad \alpha = 1, \ \mu = 1$$

qui se présente certainement toutes les fois que p est un facteur premier qui divise u sans diviser D. Alors la somme des sinus se réduit au sinus unique

$$\sin\frac{2\pi M}{p}$$

et ne s'annule pas.

Je n'insisterai pas davantage, et je ne parlerai même pas du cas intéressant où D serait non-reste quadratique à p, et je me contenterai d'avoir montré par ces exemples que Θ_μ n'est pas toujours identiquement nul.

Supposons maintenant que l'on fasse subir à m et à n une transformation linéaire, en posant

$$(14.) \qquad m = \alpha m' + \beta n', \quad n = \gamma m' + \delta n'.$$

Posons

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = a'm'^2 + 2b'm'n' + c'n'^2,$$

$$\xi m + \eta n = \xi' m' + \eta' n'.$$

Comme $\Theta_\mu(x, y)$ dépend non seulement de x et de y, c'est-à-dire de ξ et de η mais encore de a, b, c, nous pourrons mettre ce fait en évidence en écrivant

$$\Theta_\mu(x, y) = \Theta(a, b, c; \xi, \eta),$$

$$\frac{1}{2}\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2} z^{\xi m+\eta n} - \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2} z^{\xi m+\eta n}$$

la 1ère sommation s'étendant aux valeurs de m et de n qui satisfont aux inégalités

$$(15.) \qquad n \geqq 0, \qquad a u_\mu m + (t_\mu + b u_\mu) n < 0$$

et la 2de à celles qui satisfont aux inégalités

$$(15^{\text{bis}}.) \qquad n < 0, \quad a u_\mu m + (t_\mu + b u_\mu) n \geqq 0.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons remplacer les inégalités (15.) et (15bis.) qui définissent l'angle ω_0^μ et qui sont analogues aux inégalités (2.) par d'autres inégalités analogues aux inégalités (2bis.) et qui s'écrivent:

$$(16.) \quad \lambda'(am + bn) + \lambda n \geqq 0; \quad (\lambda u_\mu + \lambda' t_\mu)(am + bn) + (\lambda t_\mu + \lambda' u_\mu D) n < 0,$$

$$(16^{\text{bis}}.) \quad \lambda'(am + bn) + \lambda n < 0; \quad (\lambda u_\mu + \lambda' t_\mu)(am + bn) + (\lambda t_\mu + \lambda' t u_\mu D) n \geqq 0.$$

On aura alors

$$\frac{1}{2}\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Sigma q^{a'm'^2+2b'm'n'+c'n'^2} z^{\xi' m'+\eta' n'} - \Sigma q^{a'm'^2+2b'm'n'+c'n'^2} z^{\xi' m'+\eta' n'}$$

où m' et n' satisfont sous le 1er signe Σ aux inégalités

$$(17.) \quad \gamma m' + \delta n' \geqq 0, \quad a u_\mu(\alpha m' + \beta n') + (t_\mu + b u_\mu)(\gamma m' + \delta n') < 0$$

et sous le 2d signe Σ aux inégalités (17bis.) opposées à (17.), comme (15bis.) et (16bis.) le sont à (15.) et à (16.).

Changeons dans les inégalités (16.) a et b en a' et b', m et n en m' et n' et cherchons ensuite à identifier les inégalités (16.) ainsi modifiées avec les inégalités (17.); il viendra

$$(18.)\qquad \begin{cases} \lambda' a' = \gamma, \ \lambda' b' + \lambda = \delta; \quad \lambda a' = a\alpha + b\lambda' a', \\ \lambda b' + \lambda' D = a\beta + b\delta. \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si l'on peut trouver des valeurs de λ et λ' satisfaisant aux équations (18.); or en éliminant λ et λ' entre ces équations on trouve

$$(19.)\qquad \begin{cases} b'\gamma + a\alpha + b\gamma = \delta a', \\ c'\gamma + a\beta + b\delta = \delta b' \end{cases}$$

que l'on peut remplacer par l'équation unique

$$(20.)\qquad am + bn = \delta(a'm' + b'n') - \gamma(b'm' + c'n').$$

Or de l'identité

$$F = am^2 + 2bmn + cn^2 = a'm'^2 + 2b'm'n' + c'n'^2$$

on déduit par différentiation

$$\frac{dF}{dm} = \delta \frac{dF}{dm'} - \gamma \frac{dF}{dn'}$$

ce qui vérifie l'équation (20.).

Les inégalités (17.) et (17bis.) sont donc bien de la forme des inégalités (16.) et (16bis.) modifiées, de sorte que l'on aura

$$\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Theta(a', b', c'; \xi', \eta')$$

si l'on a

$$\xi \equiv \xi', \ \eta \equiv \eta' \pmod{p}.$$

On voit que Θ ne change pas quand on change a, b, c en a', b', c'. Or c'est ce qui arrivera toutes les fois que

$$(21.)\qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{p}.$$

Les congruences (21.) définissent un sous-groupe (Kongruenzgruppe) du groupe des transformations linéaires à coëfficients entiers et l'analyse qui précède montre que $\Theta_\mu(x, y)$ est un invariant *pour ce sous-groupe.*

Nous ne pouvons pas retrouver ainsi notre invariant $F(q)$ et pour l'obtenir il faut avoir recours à d'autres considérations. Voyons d'abord

quelle relation il y a entre la fonction théta-elliptique de *Jacobi:*

$$\Theta(x)=\Sigma\, q^{m^2}e^{imx} \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

ou

$$\Theta(x)=1+2\,\Sigma\, q^{m^2}\cos mx \qquad (m=1,2,\ldots)$$

et la fonction de *Fredholm:*

$$\varphi(x)=\Sigma\, q^{m^2}e^{imx}\,. \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

Nous pouvons d'abord poser:

$$2\varphi(x)=1+\Theta(x)+i\psi(x)$$

où

$$\psi(x)=2\,\Sigma\, q^{m^2}\sin mx. \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Rappelons maintenant que

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x}=\pm\frac{\pi}{2}$$

avec le signe + si a est positif et le signe − si a est négatif.

Considérons alors l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\Theta(x-z)-\Theta(x+z)]=4\,\Sigma\int q^{m^2}\sin mx\sin mz\,\frac{dz}{z}.$$

Elle donne

$$\pi\psi(x)=\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\Theta(x-z)-\Theta(x+z)].$$

Inversement on a

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\psi(x+z)-\psi(x-z)]=4\,\Sigma\int q^{m^2}\sin mz\cos mx\,\frac{dz}{z}$$

d'où

$$\pi\Theta(x)=\pi+\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\psi(x+z)-\psi(x-z)].$$

C'est une formule analogue que nous allons appliquer ici.

Posons

$$x=e^{i\xi},\ y=e^{i\eta}$$

d'où

$$\Theta(x,y)=2\,\Sigma\, q^A e^{i(m\xi+n\eta)}-2\,\Sigma\, q^A e^{-i(m\xi+n\eta)};\ A=am^2+2bmn+cn^2$$

m et n satisfaisant aux inégalités définies plus haut; je préfère écrire:

$$\Theta(x, y) = 2H_1 + 2H_2 - 2H_3 - 2H_4$$

où H_1, H_2, H_3, H_4 représentent la somme $\Sigma q^A e^{i(m\xi+n\eta)}$ avec les conditions:

$$(22.)\quad \begin{cases} n>0,\ aum+(t+bu)n<0 & \text{pour } H_1 \quad (\alpha) \\ n<0,\ aum+(t+bu)n>0 & \text{pour } H_3 \quad (\beta) \\ n=0, \qquad\qquad m>0 & \text{pour } H_2 \quad (\gamma) \\ n<0,\ aum+(t+bu)n=0 & \text{pour } H_4 \quad (\delta). \end{cases}$$

Je suppose $au<0$; dans ces conditions nous avons

$$H_1 - H_3 = 2i\Sigma q^A \sin(m\xi+n\eta)$$

m et n satisfaisant aux conditions (22.) (α). Soient alors λ et μ deux quantités choisies de façon que $\lambda m+\mu n$ soit positif toutes les fois que m et n satisfont à $(22\alpha.)$. Posons

$$\xi=\lambda z,\ \eta=\mu z,$$

il viendra

$$(23.)\qquad \int_0^\infty (H_1-H_3)\frac{dz}{z} = i\pi\Sigma q^A.$$

Nous avons d'autre part

$$H_2 = \Sigma q^{am^2} e^{im\xi}, \qquad (m=1,2,\ldots)$$
$$H_4 = \Sigma q^{am'^2} e^{-im'\xi'} \qquad (m'=1,2,\ldots)$$

avec

$$\xi' = (t+bu)\xi - au\eta.$$

Peut-on choisir λ et μ de telle sorte que $\xi'=\xi$? Evidemment oui, il suffit de prendre

$$(24.)\qquad \lambda = (t+bu)\lambda - au\mu.$$

Quand λ et μ sont choisis de façon à satisfaire à cette équation, l'expression $\lambda m+\mu n$ ne peut s'annuler que pour une certaine valeur du rapport $\frac{m}{n}$, ou si nous revenons à notre représentation géométrique, quand notre point représentatif est sur une certaine droite passant par l'origine. Que cette droite n'est pas à l'intérieur de l'angle ω_0, c'est ce qui est évident, puisque l'équation (23.) exprime précisément que $\lambda m+\mu n$ a même valeur en deux points correspondants des deux côtés de l'angle ω_0. Donc $\lambda m+\mu n$ conservera toujours le même signe à l'intérieur de cet angle, c'est-à-dire quand

m et n satisfont aux inégalités (2.), ou si l'on préfère aux conditions (22α.) ou (22γ.). Nous pourrons choisir λ et μ de façon que ce signe constant soit le signe $+$.

Dans ces conditions les équations (23.) et (24.) seront vraies à la fois, et nous pourrons écrire

$$H_2 - H_4 = 2i\Sigma q^{am^2} \sin m\xi$$

d'où

$$\int_0^\infty (H_2 - H_4)\frac{dz}{z} = i\pi\Sigma q^{am^2}$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \Theta(e^{i\lambda z}, e^{i\mu z})\frac{dz}{z} = 2i\pi\Sigma q^A + 2i\pi\Sigma q^{am^2}.$$

Dans le calcul de A, il faut donner à m et à n toutes les valeurs satisfaisant aux conditions (22α.); on voit alors que $\Sigma q^A + \Sigma q^{am^2}$ c'est notre invariant $F(q)$; on a donc

$$\int_0^\infty \Theta(e^{i\lambda z}, e^{i\mu z})\frac{dz}{z} = 2i\pi F(q)$$

et c'est là la relation cherchée entre la fonction $\Theta(x, y)$ et l'invariant arithmétique de *Lejeune-Dirichlet*.

Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn *K. Hensel.*)

Von Herrn *F. Klein* in Göttingen.

Indem ich Ihrer werten Aufforderung entspreche, einen Beitrag zu dem Festbande des Journals zu schreiben, der dem Andenken *Dirichlet*s gewidmet ist, greife ich auf eine Note zurück, die ich vor 6 Jahren in den Rendiconti della Accademia dei Lincei veröffentlichte und in der ich die Grundlinien einer *allgemeinen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades* skizzierte.*) Ich stelle mir das Ziel, die dort nur angedeuteten Überlegungen ausführlicher und in mehr konkreter Form darzulegen. In der Tat hat selbst ein so genauer Kenner der einschlägigen Literatur, wie Herr *Lachtin*, den in Betracht kommenden Ansatz nicht in seiner prinzipiellen Einfachheit aufgefaßt (wie ich weiter unten noch näher ausführe).**) Im übrigen handle ich unter den Impulsen meines alten Freundes *Gordan*, der sein großes algebraisches Können neuerdings der in Frage stehenden Problemstellung zugewandt hat. Herr *Gordan* wird eine erste einschlägige Abhandlung demnächst in den Mathematischen Annalen veröffentlichen.***) Es ist dies aber nur ein Anfang; ich hoffe, daß es seinen fortgesetzten Bemühungen gelingen wird, den Gegenstand nach allen Seiten ebenso vollständig zu klären, wie

*) Sitzung vom 9. April 1899, Rendiconti VIII (1° semestre): *Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado* (estratto da una lettera al sig. Castelnuovo).

**) 1901, Moskauer Mathematische Sammlung, Bd. XXII, S. 181—218 (russisch).

***) *Über die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems* (ein Beitrag zur Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten Grades). — Vergl. auch eine Mitteilung an den Heidelberger Internationalen Mathematiker-Kongreß (August 1904).

uns dies früher gemeinsam mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades geglückt ist.

Auf diese *Theorie der Gleichungen fünften Grades*, wie ich sie in meinen „*Vorlesungen über das Ikosaeder*“ (Leipzig, 1884) zusammengefaßt habe, möchte ich hier vorab in der Weise eingehen, daß ich diejenigen Momente hervorkehre, welche in den nachfolgenden, auf die Gleichungen sechsten Grades bezüglichen Überlegungen ihre genaue Weiterbildung finden sollen. Ich habe in Kapitel V der „Vorlesungen“ zweierlei Auflösungsmethoden der Gleichungen fünften Grades auseinandergesetzt (die sich übrigens nur durch die Reihenfolge der auszuführenden Schritte unterscheiden). Es wird sich hier um die *zweite* dieser Methoden handeln, die sich als eine organische Fortsetzung von *Kronecker*s (und *Brioschi*s) Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades darstellt. In den „Vorlesungen“ wird diese Methode — gleich der ersten — in geometrischer Form entwickelt, wobei spezielle, nur bei den Gleichungen fünften Grades hervortretende Beziehungen den Ausgangspunkt abgeben. Statt dessen greife ich hier auf die *algebraische* Begründung der Methode zurück, die ich s. Z. in Band 15 der Mathematischen Annalen entwickelte und mit Überlegungen über die Auflösung beliebiger höherer Gleichungen begleitete.*)

Die Ikosaedertheorie der Gleichungen fünften Grades und die mit ihr zusammenhängenden allgemeinen Überlegungen sind seitdem mehrfach von anderer Seite zur Darstellung gebracht worden, so insbesondere im zweiten Bande des ausgezeichneten *Lehrbuches der Algebra* von *H. Weber* (Braunschweig, zweite Auflage 1898, 1899), sowie in dem ausführlichen Bericht, den Herr *Wiman* in Bd. I der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften über *Endliche Gruppen linearer Substitutionen* erstattet hat (S. 522—554, 1900). Trotzdem scheint es, daß die prinzipielle Bedeutung des ganzen Ansatzes im mathematischen Publikum immer noch vielfach nicht verstanden wird. Es handelt sich nicht um Überlegungen, welche sich *neben* die früheren Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades stellen, sondern um solche, die den Anspruch erheben, den eigentlichen Kern dieser früheren Untersuchungen auszumachen. Ich will ver-

*) *Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* (1879); vergl. insbesondere den § 4 daselbst („die Formeln von *Kronecker* und *Brioschi* für den fünften Grad“).

suchen, in dem folgenden Berichte dementsprechend die Hauptpunkte der Theorie (die sich dann später mutatis mutandis bei dem Ansatze für die Gleichungen sechsten Grades wiederfinden) so genau zu bezeichnen, als bei der gebotenen Kürze möglich scheint.

Das Erste ist, daß wir die *Ikosaedergleichung*, d. h. die Gleichung sechzigsten Grades, welche in den „Vorlesungen“ folgendermaßen geschrieben wird:

$$\frac{H^3(x)}{1728 f^5(x)} = X, \tag{1.}$$

als eine *Normalgleichung sui generis* ansehen, welche sich vermöge ihrer ausgezeichneten Eigenschaften als die nächste Verallgemeinerung der „reinen“ Gleichungen:

$$x^n = X \tag{2.}$$

darstellt. In der Tat lassen sich die 60 Wurzeln von (1.) aus einer beliebigen derselben genau so durch 60 a priori bekannte lineare Substitutionen (die Ikosaedersubstitutionen) berechnen, wie die n Wurzeln von (2.) aus einer derselben durch die n Substitutionen $x' = e^{\frac{2ink}{n}} \cdot x$. Nun erweist sich die Gruppe der Ikosaedersubstitutionen mit der Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von fünf Dingen als isomorph. Hierdurch gewinnt der *Abel*sche Beweis, daß es unmöglich ist, die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades auf eine Reihenfolge reiner Gleichungen (2.) zurückzuführen, seine positive Wendung. Die Aufgabe muß sein, *die Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu bewerkstelligen.* Und hier mögen wir einen algebraischen und einen transzendenten Teil der Untersuchung unterscheiden. Der erstere Teil wird sich damit beschäftigen, aus den Wurzeln $z_1, \ldots z_5$ einer vorgelegten Gleichung fünften Grades die Wurzel x einer Ikosaedergleichung (1.) algebraisch zusammenzusetzen, den Parameter X der letzteren durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, bezw. die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante, zu berechnen, endlich wieder die $z_1, \ldots z_5$ durch das x darzustellen. Der transzendente Teil aber wird die Aufgabe haben die Wurzel x der Ikosaedergleichung aus dem Parameter X durch unendliche Prozesse zu berechnen. Dies gelingt genau so durch *hypergeometrische Reihen* wie die transzendente Auflösung der Gleichung (2.) durch die binomische Reihe. — In den „Vorlesungen über das Ikosaeder“ ist insbesondere nachgewiesen,

daß *alle* algebraischen Untersuchungen, die man zum Zwecke der Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades angestellt hat, Umschreibungen des vorgenannten algebraischen Problems sind. Der transzendente Teil der Aufgabe wird nur mehr gestreift. Es wird aber klar ausgesprochen, welche Bewandtnis es mit der sogenannten Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch *elliptische Funktionen* hat. Ich beziehe mich hier auf meine ausführlichen anderweitigen Darlegungen, die u. a. in die von *Fricke* und mir bearbeiteten *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Leipzig 1890, 1892) eingearbeitet sind. Zwischen der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Funktionen und der Ikosaedertheorie besteht ein notwendiger Zusammenhang. Setzt man in (1.) für X die absolute Invariante J der elliptischen Modulfunktionen, so bekommt die Ikosaedergröße x die einfache Bedeutung des „Hauptmoduls der Hauptkongruenzgruppe fünfter Stufe". Alle Arten, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit den elliptischen Funktionen in Zusammenhang zu bringen, beruhen auf diesem Fundamentalsatz. Insbesondere läßt sich x selbst durch elliptische ϑ-Reihen darstellen; es ist eine Formel von prinzipieller Einfachheit; man hat (wenn ich der Kürze halber die *Jacobi*schen Bezeichnungen gebrauchen darf):

$$x = q^{2/5} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K}, q^5\right)}. \tag{3.}$$

Die Benutzung dieser Formel zur Auflösung der Ikosaedergleichung (oder ähnlicher Formeln zur Auflösung irgendwelcher Resolventen der Ikosaedergleichung) ist aber genau so ein Umweg, wie die Lösung der reinen Gleichung (2.) *durch Logarithmen:*

$$x = e^{\frac{1}{n}\log X}. \tag{4.}$$

Muß man doch zuerst $\frac{K'}{K}$ bezw. $\log X$ aus X berechnen, ehe man die Formeln (3.), (4.) anwenden kann. Die Bedeutung der Formeln für die Auflösung ist höchstens eine praktische, falls man nämlich eine Logarithmentafel bezw. eine Tafel der elliptischen Perioden K, K' besitzt. *Man möge also endlich aufhören, sich so auszudrücken, als wenn die Benutzung der elliptischen Funktionen das Wesentliche an der Theorie der Gleichungen fünften Grades wäre.* Diese Ausdrucksweise ist nur ein Residuum der

zufälligen historischen Entwicklung: die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hat den ersten Anstoß gegeben, gewisse einfache algebraische Gleichungen aufzustellen (die Modulargleichungen und Multiplikatorgleichungen für den fünften Transformationsgrad), die der Ikosaedergleichung nahe verwandt sind.

So viel über die Einführung des Ikosaeders in die Theorie der Gleichungen fünften Grades im allgemeinen. Ich muß mich nunmehr ganz auf die algebraische Seite der Aufgabe beschränken. Und hier habe ich vor allen Dingen einen fundamentalen Satz betr. die Ikosaedersubstitutionen zu erwähnen, der in der Folge besonders wichtig wird. Man kann von der Ikosaedersubstitution der in (1.) auftretenden Unbekannten x zu *homogenen* Substitutionsformeln übergehen (indem man x in den Substitutionsformeln überall durch $x_1 : x_2$ ersetzt und Zähler und Nenner in zweckmäßiger Weise trennt). Wählt man dabei die Determinante der entstehenden binären Substitutionen gleich 1, so hat man 120 binäre Substitutionen; speziell entsprechen der identischen Substitution $x' = x$ die beiden

$$(5.) \qquad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2 \quad \text{und} \quad x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2.$$

Und nun ist es auf keine Weise möglich (auch nicht, wenn man den Wert der Determinante abändert), *aus solchen homogenen Substitutionen eine mit der nicht homogenen Substitutionsgruppe isomorphe Gruppe zusammenzusetzen, die weniger als 120 Substitutionen enthielte.* Der Isomorphismus zwischen der Substitutionsgruppe des x und derjenigen der x_1, x_2 ist also notwendig ein meroedrischer! Dieser fundamentale Satz, der etwas abstrakt klingt, gibt der algebraischen Theorie der Gleichungen fünften Grades ihre eigentümliche Form, wie sofort näher darzulegen ist. Bemerken wir vorab, daß derselbe nicht etwa schwer zu beweisen ist. Auf S. 46, 47 der „Vorlesungen“ ist er darauf zurückgeführt, daß die Gruppe der nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen u. a. sogenannte Vierergruppen enthält und daß für diese Vierergruppen bereits der entsprechende Satz gilt. Nehmen wir, um dies einzusehen, die einfachste Darstellung der nicht homogenen Vierergruppe, wie sie durch folgende vier Substitutionen gegeben ist:

$$(6.) \qquad \begin{gathered} \text{I: } \xi' = \xi, \\ \text{II: } \xi' = -\xi, \quad \text{III: } \xi' = \frac{1}{\xi}, \quad \text{IV: } \xi' = -\frac{1}{\xi}. \end{gathered}$$

Hier sind II, III, IV Substitutionen von der Periode 2 und es ist zugleich

$$\text{II III IV} = \text{I}. \tag{7.}$$

Will man jetzt zu einer holoedrisch isomorphen Gruppe homogener Substitutionen übergehen, so hat man I jedenfalls durch

$$\text{I}': \quad \xi_1' = \xi_1, \ \xi_2' = \xi_2$$

zu ersetzen, II, III, IV aber durch

$$\text{II}': \quad \xi_1' = \mp \xi_1, \ \xi_2' = \pm \xi_2$$
$$\text{III}': \quad \xi_1' = \pm \xi_2, \ \xi_2' = \pm \xi_1$$
$$\text{IV}': \quad \xi_1' = \mp \xi_2, \ \xi_2' = \pm \xi_1$$

(wo in der einzelnen Horizontale je nach Belieben die oberen oder die unteren Vorzeichen zu nehmen sind). Aber wie man hier auch die Vorzeichen wählen möge, *die hier eingeführten Substitutionen* II', III', IV' *haben je die Determinante* (-1), und es kann also unmöglich

$$\text{II}' \ \text{III}' \ \text{IV}' = \text{I}'$$

sein, wie es doch nach (7.) bei holoedrischem Isomorphismus der Fall sein müßte! — Wir werden, nach dem so Bewiesenen, fortan unter den *homogenen Ikosaedersubstitutionen* kurzweg die 120 binären Substitutionen von der Determinante $+1$ verstehen, welche den 60 nicht homogenen Substitutionen des x entsprechen.

Ich werde nunmehr das zentrale Problem, dessen Erledigung uns obliegt, folgendermaßen formulieren: *man soll aus frei veränderlichen fünf Größen* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 *(den Wurzeln der Gleichung fünften Grades) eine Funktion* $x(z_1, \ldots z_5)$ *zusammensetzen, die bei den 60 Vertauschungen der* z *die 60 Ikosaedersubstitutionen erleidet.* Aus unserem fundamentalen Satz folgt sofort, daß es eine derartige *rationale* Funktion von fünf frei veränderlichen Größen z nicht gibt (Vorles. S. 255). Man schreibe nämlich, indem man x in teilerfremde Polynome als Zähler und Nenner spaltet: $\frac{\varphi(z_1, \ldots z_5)}{\psi(z_1, \ldots z_5)}$. Die so eingeführten φ, ψ würden sich bei den 60 Vertauschungen der z notwendig *homogen* linear substituieren. Dabei würden diese homogenen Substitutionen den Ikosaedersubstitutionen des x einzeln entsprechen; man hätte also eine mit den unhomogenen Ikosaedersubstitutionen holoedrisch isomorphe

Gruppe binärer Substitutionen, und eine solche Gruppe existiert nicht, wie wir sahen.

Die gesuchte Funktion $x(z_1, \ldots z_5)$ *muß also von ihren Argumenten algebraisch abhängen.* Und damit sind wir in das Gebiet derjenigen Irrationalitäten der Gleichungstheorie geführt, die ich in meinen Vorlesungen (S. 158, 159) *akzessorische* nenne, weil sie zu den unmittelbar vorhandenen Irrationalitäten (den rationalen Funktionen der z) — mit denen es die *Galois*sche Gleichungstheorie nach ihrer gewöhnlichen Formulierung allein zu tun hat — als etwas Neues hinzutreten. Über die Leistungsfähigkeit dieser akzessorischen Irrationalitäten wissen wir vorläufig nichts allgemeines. Wir sind vielmehr im einzelnen Falle auf tastende Versuche angewiesen. Sicher wird man bei der Auflösung irgend welcher höheren Gleichung nur solche akzessorische Irrationalitäten zulassen wollen, die sich aus den symmetrischen Funktionen der Gleichungswurzeln, ev. den vorgegebenen Affektfunktionen durch *niedrigere* Gleichungen berechnen. Bei den Gleichungen fünften Grades, die wir hier behandeln, gilt neben den symmetrischen Funktionen der z auch deren Differenzenprodukt (die Quadratwurzel aus der Diskriminante) als bekannt. *Der Erfolg zeigt, daß wir in mannigfacher Weise ein von den* z *ikosaedrisch abhängendes* x *konstruieren können, sobald wir nur die Quadratwurzel aus einer geeigneten rationalen Funktion dieser Größen adjungieren wollen.**) Die zweierlei Methoden zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades, welche ich in meinen „Vorlesungen“ gebe, unterscheiden sich nur durch den *Platz*, den sie der Adjunktion dieser akzessorischen Quadratwurzel anweisen. Bei der ersten Methode wird die akzessorische Quadratwurzel (indem man die Gleichung fünften Grades durch eine Tschirnhaustransformation in eine sogenannte Hauptgleichung fünften Grades verwandelt, d. h. eine Gleichung, bei der die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet) vorweggenommen. Bei der zweiten Methode wird zunächst ein Schritt auf das Ikosaederproblem zu getan und dann erst die akzessorische Quadratwurzel adjungiert. Wie bereits

*) Hierzu kommt dann noch die fünfte Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, die in den Ikosaedersubstitutionen immerzu auftritt und die bei der Bildung eines geeigneten x dementsprechend jedenfalls zu benutzen ist. Zählen wir sie, wie man streng genommen tun müßte, mit zu den akzessorischen Irrationalitäten, so hat man akzessorische Irrationalitäten in der Gleichungstheorie von Anfang an, nämlich schon bei der Reduktion der zyklischen Gleichungen auf reine Gleichungen.

in der Einleitung gesagt, bevorzuge ich hier diese zweite Methode, indem ich ihre einzelnen Schritte in einer solchen Weise formelmäßig exponiere, daß sich der ganze Ansatz hernach in sinngemäßer Weise auf die Gleichungen sechsten Grades übertragen läßt.

Hier in numerierter Reihenfolge die wesentlichen Überlegungen (der zweiten Methode):

1. Wenn die x_1, x_2 die homogenen binären 120 Ikosaedersubstitutionen erleiden, so erfahren die Quadrate und Produkte

$$x_1^2, \quad x_1 x_2, \quad x_2^2$$

ihrerseits nur 60 homogene ternäre Substitutionen von der Determinante 1 (deren Gruppe den 60 nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen von $\frac{x_1}{x_2}$ und damit den 60 geraden Vertauschungen der fünf Größen $z_1, \ldots z_5$ holoedrisch isomorph ist).

2. Dasselbe gilt, nach den allgemeinen Grundsätzen der Invariantentheorie, von den Koeffizienten einer in den x_1, x_2 quadratischen binären Form. Ich werde eine solche Form hier, um unmittelbaren Anschluß an die (auch in meinen „Vorlesungen“ benutzte) Schreibweise von *Kronecker* und *Brioschi* zu haben, folgendermaßen bezeichnen:

$$A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2. \tag{8.}$$

Die A_1, $2A_0$, $-A_2$ substituieren sich nach der Ausdrucksweise der Invariantentheorie zu den x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 *kontragredient*.

3. Wir schließen, daß es ohne weiteres möglich sein wird, aus irgend vorgegebenen fünf Größen $z_1, \ldots z_5$ solche rationale Funktionen zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z sich genau so substituieren, wie die A_0, A_1, A_2. In der Tat habe ich in der bereits in der Einleitung genannten Arbeit aus Bd. 15 der Mathematischen Annalen einen allgemeinen Ansatz gegeben, demzufolge man immer, wenn zwei Größenreihen (hier die z und die A) holoedrisch isomorphe homogene lineare Substitutionen erleiden, aus den Größen der einen Art in mannigfachster Weise rationale Funktionen zusammensetzen kann, die sich wie Größen der zweiten Art substituieren.

4. Wir reproduzieren hier nicht diesen allgemeinen Ansatz (was unnötig weitläufig wäre), sondern geben hier gleich die abgekürzte Form, in die er sich bei unserem speziellen Problem zusammenziehen läßt und in der er

mit den auf Gleichungen fünften Grades bezüglichen Entwicklungen von *Kronecker* und *Brioschi* in unmittelbaren Kontakt tritt. Es handelt sich um folgende Punkte:

4a. Man kann aus den x_1, x_2 sechs quadratische Ausdrücke bilden:

$$(9.) \qquad \sqrt{5}\cdot x_1 x_2, \quad \varepsilon^\nu x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4\nu} x_2^2, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}};\ \nu = 0,1,2,3,4)$$

die sich bei den Ikosaedersubstitutionen mit gewissen (hier nicht näher anzugebenden) Zeichenwechseln vertauschen.

4b. Sei ferner $v(z_1, \dots z_5)$ eine rationale Funktion der z, die bei der zyklischen Vertauschung der in natürlicher Reihenfolge genommenen z ungeändert bleibt. Wir bilden uns die Differenz

$$v(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) - v(z_5 z_4 z_3 z_2 z_1)$$

und erheben sie ins Quadrat. Wir haben dann eine „metazyklische" Funktion, die u_∞^2 heißen soll, während die fünf weiteren Werte, die aus ihr durch die geraden Vertauschungen der z entstehen, in geeigneter Reihenfolge mit u_ν^2 bezeichnet werden mögen ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$). Man kann dann die Vorzeichen der verschiedenen u so wählen, *daß sich die*

$$(10.) \qquad u_\infty, \ u_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

bei den geraden Vertauschungen der z genau so, nämlich auch mit denselben Zeichenwechseln, linear substituieren, wie die Ausdrücke (9.) *bei den korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen der* x_1, x_2.

4c. Wir schließen, daß die folgende Form der z und der x

$$(11.) \qquad \Omega(z|x) = \sqrt{5}\cdot u_\infty \cdot x_1 x_2 + \sum_\nu u_\nu (\varepsilon^\nu x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4\nu} x_2^2)$$

ungeändert bleibt, wenn man auf die z die geraden Vertauschungen und gleichzeitig auf die x_1, x_2 die korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen ausübt.

4d. Wir setzen jetzt, in Übereinstimmung mit (8.):

$$\Omega(z|x) = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$$

und finden durch Vergleich:

$$(12.) \qquad \begin{cases} 2A_0 = \sqrt{5}\cdot u_\infty + \sum_\nu u_\nu, \\ A_1 = \sum \varepsilon^\nu \cdot u_\nu, \\ A_2 = \sum \varepsilon^{4\nu} \cdot u_\nu. \end{cases}$$

Hiermit haben wir in der Tat aus den $z_1, \dots z_5$ Größen A_0, A_1, A_2 zusammengesetzt, die sich bei den geraden Vertauschungen der z in der gewollten Weise ternär substituieren.

5. Wir werden das hiermit erreichte Resultat in der Folge gelegentlich dahin kurz aussprechen, daß wir sagen: wir haben den $z_1, \dots z_5$ eine quadratische binäre Form (8.) „kovariant“ zugeordnet. Die Diskriminante von (8.):

$$A = A_0^2 + A_1 A_2 \tag{13.}$$

ist als binäre Invariante dabei eine solche Funktion der $z_1, \dots z_5$, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert; sie ist also eine rationale Funktion der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante.

6. Nun ist aber doch das Ziel, den $z_1, \dots z_5$ nicht eine quadratische Form oder ein „Punktepaar“ des binären Gebietes:

$$A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0 \tag{14.}$$

sondern einen Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$, einen „Punkt“, kovariant zuzuordnen. Wir machen dies in einfachster Weise, indem wir die quadratische Gleichung (14.) auflösen und dementsprechend schreiben:

$$\frac{x_1}{x_2} = x = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1}. \tag{15.}$$

7. *Hiermit haben wir unsere zentrale Aufgabe gelöst: aus den $z_1, \dots z_5$ ein solches x zusammenzusetzen, welches bei den geraden Vertauschungen der z die Ikosaedersubstitutionen erleidet.* Man beachte, daß die A_0, A_1, A_2 nach Nr. 4d rationale Funktionen der z sind, bei deren Konstruktion keine andere Irrationalität als die fünfte Einheitswurzel ε benutzt ist. Und unter der Quadratwurzel steht (nach Nr. 5) eine solche Verbindung der A_0, A_1, A_2, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert. *Wir sind also mit Hilfe solcher akzessorischen Irrationalitäten zum Ziele gekommen, die man in der Theorie der Gleichungen fünften Grades füglich als niedere Irrationalitäten bezeichnen wird.*

8. Wie man nun weiter den Parameter X der Ikosaedergleichung, der unser x (15.) genügt, als Funktion der Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln die $z_1, \dots z_5$ sind, bezw. der Quadratwurzel

aus ihrer Diskriminante berechnet, und wie man schließlich die z mit Hilfe der Koeffizienten und der adjungierten Quadratwurzeln durch das x rational darstellt, also die Gleichung fünften Grades mit Hilfe der Ikosaedergleichung wirklich auflöst, möge hier, unter Verweis auf die „Vorlesungen", unerörtert bleiben.

9. Wohl aber möge noch zusammenfassend klar hervorgehoben werden, wieso man mit Fug und Recht von einer so gewonnenen *Auflösung* der Gleichungen fünften Grades reden kann. Es ist nicht nur eine Reihenfolge von Schritten angegeben, die man im gegebenen Falle numerisch würde durchlaufen können, so daß man die Zahlenwerte der $z_1, \ldots z_5$ tatsächlich erhält, es ist vielmehr auch eine volle funktionentheoretische Einsicht in die innere Natur des Auflösungsproblems erreicht. Schließlich sind doch die $z_1, \ldots z_5$ die verschiedenen Zweige einer von den Koeffizienten der Gleichung fünften Grades abhängigen fünfwertigen algebraischen Funktion von zunächst sehr unübersichtlicher Bauart. *Diese fünf Zweige werden in demjenigen Rationalitätsbereiche, der durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante und die zu adjungierenden akzessorischen Irrationalitäten gegeben wird, durch eine einzige, nur von einem, dem Rationalitätsbereiche angehörigen, Parameter abhängige höhere Irrationalität durchsichtigster Bauart, die Ikosaederirrationalität, rational dargestellt.* —

Ich möchte an dieser Stelle noch eine mehr persönliche Bemerkung über die Beziehung meiner Arbeiten über die Gleichungen fünften Grades zu denjenigen von *Kronecker* einschalten, — um so lieber, als Sie ja, hochgeehrter Herr Kollege, über die *Kronecker*schen Manuskripte verfügen und dadurch in der Lage sind, meine Angaben in authentischer Weise zu vervollständigen. *Kronecker* und *Brioschi* haben bekanntlich in ihren ersten Arbeiten über Gleichungen fünften Grades (aus dem Jahre 1858) gerade dieselben Größen A_0, A_1, A_2 benutzt, die ich vorhin (in Nr. 4b) angebe; sie haben dann die Gleichung sechsten Grades konstruiert, der $\zeta = 5 A_0^2$ genügt und die *Brioschi* wegen ihres engen Zusammenhangs mit gewissen von *Jacobi* für die Transformation der elliptischen Funktionen aufgestellten Gleichungen eine *Jacobi*sche Gleichung nennt; sie haben endlich angegeben, daß man durch Adjunktion einer Quadratwurzel zu einer Gleichung mit nur einem Parameter gelangen kann. Diese Quadratwurzel bezeichnet eine akzessorische Irrationalität, die der in Formel (15.) benutzten gleichwertig

ist. Weiterhin stellte dann *Kronecker* (1861) den fundamentalen Satz auf, den ich in meinen „Vorlesungen“ als *Kronecker*schen Satz bezeichne und mit dessen Darlegung und Beweis ich meine „Vorlesungen“ kröne: den Satz, *daß es unmöglich sei, ohne Heranziehung akzessorischer Irrationalitäten von der allgemeinen Gleichung fünften Grades eine Resolvente mit nur einem Parameter zu bilden.* Ich beweise diesen Satz l. c. wie vorher (1877) im 12. Bande der Mathematischen Annalen, indem ich mich auf die oben besprochene Eigenschaft der Ikosaedergruppe berufe, beim Übergang zur homogenen Schreibweise ihre Substitutionen mindestens zu verdoppeln; mein erster Beweis, den ich 1877 in den Berichten der Erlanger physikalisch-medizinischen Sozietät gab (Sitzung vom 13. Januar), war noch wesentlich umständlicher. Ich habe nun vor 24 Jahren (Ostern 1881) Gelegenheit gehabt, mit *Kronecker* über diese Dinge ausführlich zu sprechen. Es ergab sich, daß *Kronecker* bei seinen Untersuchungen die Ikosaedersubstitutionen, denen er doch so nahe gekommen war, nicht gekannt und dementsprechend für seinen Hauptsatz keinen ausreichenden Beweis gefunden hatte! Es ist dies, wie ich meine, eine auch unter allgemeinen Gesichtspunkten sehr bemerkenswerte Tatsache. Denn sie bestätigt an einem besonders interessanten Falle, was *Gauß* so oft hervorhebt: daß die Auffindung wichtigster mathematischer Theoreme vielmehr Sache der Intuition als der Deduktion ist und daß die Herstellung der Beweise ein von der Auffindung der Theoreme sehr verschiedenes Geschäft ist. Ich bin später mit *Kronecker* auf den Gegenstand nie zurückgekommen, hörte aber vor einigen Jahren, daß *Kronecker* nach dem Erscheinen meiner „Vorlesungen“ in einem Kolleg über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zur Ikosaedertheorie Stellung genommen habe. Es würde mich (und jedenfalls auch andere Mathematiker) sehr interessieren zu erfahren, was in den hinterlassenen Papieren von *Kronecker* über diese Dinge enthalten sein mag, und ich möchte also den Wunsch an Sie richten, das einschlägige Material zu sichten und bald zu publizieren. —

Ein neuer Beweis des *Kronecker*schen Satzes ist bekanntlich von Herrn *Gordan* in Bd. 29 der Mathematischen Annalen gegeben worden (1887: *Über biquadratische Gleichungen**)). Derselbe ist insofern einfacher zu

---

*) Man vergleiche auch die Darstellung des *Gordan*schen Beweises in den Lehrbüchern der Algebra von *Weber* und von *Netto*.

lesen als der meinige, als er auf eine explizite Kenntnis der Ikosaedersubstitutionen nirgends Bezug nimmt. Trotzdem hängt derselbe, wie ich hier bemerken möchte, mit dem Grundgedanken meines Beweises auf das genaueste zusammen. Wir beide benutzen im Anschluß an eine Entwicklung von Herrn *Lüroth* einen Hilfssatz, der sich folgendermaßen formulieren läßt: Wenn eine Gleichung n-ten Grades mit frei veränderlichen Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter besitzen soll, dann muß es eine rationale Funktion x der Wurzeln $z_1, \ldots z_n$ geben, die sich bei den zur *Galois*schen Gruppe der Gleichung gehörigen Vertauschungen der z *linear mit konstanten Koeffizienten* transformiert. Wir benutzen ferner gemeinsam die Überlegung, daß sich diese Gruppe linearer Substitutionen beim Übergang zur binären Schreibweise in eine holoedrisch isomorphe Gruppe binärer linearer Substitutionen umsetzen lassen muß. Natürlich muß diese Gruppe andererseits mit der *Galois*schen Gruppe der vorgelegten Gleichung modulo einer ausgezeichneten Untergruppe der letzteren isomorph sein. Jetzt habe ich auf S. 44—47 meiner „Vorlesungen" den Satz gegeben, daß nur folgende Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen sich holoedrisch isomorph in die binäre Form umsetzen lassen: 1. Die zyklischen Gruppen. 2. Die Diedergruppen von ungeradem n. Es folgt, *daß eine Gleichung n-ten Grades mit frei veränderlichen Wurzeln* $z_1, \ldots z_n$ *nur dann eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter zuläßt* (die dann sofort in eine reine Gleichung, bezw. eine Diedergleichung von ungeradem n umgesetzt werden kann), *wenn ihre Galoissche Gruppe modulo einer ausgezeichneten Untergruppe zu einer zyklischen Gruppe oder einer Diedergruppe von ungeradem n isomorph ist.* Eine zugehörige Resolvente mit nur einem Parameter läßt sich dann nach den Prinzipien von Ann. 15 auch gleich aufstellen. Der so ausgesprochene allgemeine Satz umfaßt nun sowohl den *Gordan*schen als meinen Beweis des *Kronecker*schen Satzes. Mein Beweis erledigt sich in der Tat durch den Hinweis, daß die Gruppe einer Gleichung fünften Grades mit adjungierter Quadratwurzel aus der Diskriminante einfach ist und die ihr holoedrisch isomorphe Ikosaedergruppe linearer Substitutionen einer Veränderlichen nicht unter die Voraussetzungen unseres Satzes fällt. Der *Gordan*sche Beweis dagegen benutzt, wenn ich ihn recht verstehe, die selbstverständliche Tatsache, daß die betr. Gruppe wie jede Gruppe sich selbst als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Modulo dieser Untergruppe ist sie zur Identität kongruent. Und die identische

Substitution fällt unter die Voraussetzung unseres Satzes. Es gibt also in der Tat Resolventen mit einem Parameter, die aber für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades gänzlich unbrauchbar sind, nämlich *lineare*, deren Wurzel eine solche Funktion der $z_1, \ldots z_5$ ist, welche bei den geraden Vertauschungen der z ihren Wert überhaupt nicht ändert! Aber andere (rationale) Resolventen mit nur einem Parameter gibt es nicht, oder besser: jede rationale Resolvente unserer Gleichung fünften Grades mit nur einem Parameter ist linear und also unbrauchbar. —

So viel über die Ikosaedersubstitutionen und die durch sie vermittelte Auflösung der Gleichungen fünften Grades. An Stelle der „unären“ Substitutionen $x' = e^{\frac{2i\pi k}{n}} x$, welche die Wurzeln einer *reinen* Gleichung unter einander verknüpfen, sind „binäre“ lineare Substitutionen zweier homogenen Variabeln x_1, x_2 getreten. Und hiermit ist zugleich der Weg zu neuen Verallgemeinerungen geöffnet. Man hat einfach Gruppen linearer Substitutionen *mehrerer* homogener Variabeln heranzuziehen! Ich kann hier unmöglich die Überlegungen wiederholen, die ich in dieser Hinsicht zuerst im 15. Bande der Mathematischen Annalen gab (l. c. 1879), oder die Ausführungen nennen, die sich später daran geschlossen haben. Es genüge, diesbezüglich auf *Weber*s Lehrbuch und auf den ebenfalls bereits zitierten Enzyklopädieartikel von *Wiman* zu verweisen.*) Wir denken uns in der Folge eine *Gleichung sechsten Grades nebst der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante* gegeben, deren *Galois*sche Gruppe also aus den 360 geraden Vertauschungen der Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_6$ besteht. Es wird darauf ankommen, die kleinste Zahl homogener $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ zu benutzen, bei denen eine mit diesen 360 Vertauschungen isomorphe Gruppe linearer Substitutionen möglich ist. Erwiese sich dieser Isomorphismus als holoedrisch, so würden wir nach der Vorschrift von Bd. 15 sofort rationale Funktionen der $z_1, z_2, \ldots z_6$ hinschreiben können, die sich bei den 360 geraden Vertauschungen der z wie die $x_1, \ldots x_\mu$ linear substituierten. Aber es zeigt sich, daß auch hier (wie bei den Gleichungen fünften Grades) der Isomorphismus ein meroedrischer ist, so daß wir vor die Frage gestellt werden, ob wir, bezw. wie wir mit Hilfe niederer akzessorischer Irrationalitäten überhaupt durchkommen?

---

*) Eine übersichtliche erste Orientierung gibt auch der Vortrag IX meines gelegentlich der Weltausstellung in Chicago gehaltenen *Evanston Colloquium* (Macmillan, New-York, 1894).

Einen ersten Ansatz zur Erledigung der so formulierten Fragestellung habe ich in Band 28 der Mathematischen Annalen gemacht *(Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades)*. Daß es eine *ternäre* Gruppe linearer Substitutionen geben sollte, die mit den 360 geraden Vertauschungen von 6 Dingen isomorph wäre, schien damals, auf Grund der vorläufigen Untersuchung dieser Frage durch Herrn *C. Jordan*, ausgeschlossen; eine solche Gruppe wurde erst 1889 von Herrn *Valentiner* entdeckt (Bd. 6 der Serie V der Abhandlungen der Dänischen Akademie: *De endelige Transformations-Gruppers Theori*) und nach Struktur und zugehörigen fundamentalen Invarianten zum ersten Male von Herrn *Wiman* 1895 untersucht (Math. Ann. Bd. 47: *Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen*). Ich habe mir also damals für die allgemeine Gleichung sechsten Grades — und zugleich auch für die allgemeine Gleichung siebenten Grades — eine isomorphe Gruppe *quaternärer* Kollineationen konstruiert, und habe gezeigt, daß man bei der Zurückführung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die entsprechenden quaternären Gleichungsprobleme je mit zwei akzessorischen Quadratwurzeln ausreicht.*)

Der hiermit gegebene Ansatz ist nun, was die Gleichungen *sechsten* Grades angeht, auf die wir uns hier beschränken,**) *seit der Entdeckung der Valentinergruppe bis auf weiteres überflüssig geworden.* Ich bemerke dies ausdrücklich, weil hier die Stelle ist, wo Herr *Lachtin*, wie zu Eingang dieses Briefes erwähnt, einen unnötigen Umweg macht. Um nämlich die Gleichungen sechsten Grades mit der Valentinergruppe in Verbindung zu bringen, geht Herr *Lachtin* durch die in Bd. 28 der Mathematischen Annalen gegebene Entwicklung hindurch. Dies ist nicht uninteressant***) aber für den

---

*) Die Gruppe, welche ich l. c. für die Gleichungen sechsten Grades in Vorschlag bringe, enthält sogar 720 Kollineationen, so daß es bei ihrer Benutzung nicht nötig ist, die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung sechsten Grades vorab zu adjungieren. Dagegen umfaßt die Gruppe, welche den Gleichungen siebenten Grades entspricht, nur $\frac{7!}{2} = 2520$ Kollineationen.

**) Für die Gleichungen *siebenten* Grades bleibt der quaternäre Ansatz bestehen; es ist aber unmöglich, die hierauf bezüglichen interessanten Fragen im Texte weiter zu verfolgen.

***) Herr *Lachtin* bemerkt, daß sich bei der quaternären Gruppe die Flächen zweiten Grades im Raume ganz ähnlich linear vertauschen, wie bei der Valentinergruppe die Kurven dritter Ordnung in der Ebene. Von hier aus kann man (wie beiläufig bemerkt

nächsten hier zu erreichenden Zweck keineswegs notwendig. Der Übergang von den Gleichungen sechsten Grades zur Valentinergruppe, wie ich ihn in meiner römischen Note von 1899 andeutete und den ich jetzt ausführlicher exponieren will, bedarf der Anlehnung an die quaternäre Substitutionsgruppe in keiner Weise. Der Deutlichkeit halber will ich die in Betracht kommenden Überlegungen wieder in eine Reihe von Nummern spalten, deren Aufeinanderfolge die Analogie mit dem oben bei den Gleichungen fünften Grades befolgten Gedankengange deutlich hervortreten läßt. Folgendermaßen:

1. Die Aufgabe ist, aus frei veränderlichen sechs Größen $z_1, z_2, \ldots z_6$ solche drei Funktionen x_1, x_2, x_3 zusammenzusetzen, deren Verhältnisse bei den 360 geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentinergruppe erleiden.

2. Nun hat bereits Herr *Wiman* l. c. bemerkt, daß sich die Anzahl der Valentineroperationen, wenn man von den Kollineationen der Ebene zu den entsprechenden ternären linearen Substitutionen übergeht, mindestens *verdreifacht*. Es ist also von vornherein ausgeschlossen, daß die gesuchten x_1, x_2, x_3 rationale Funktionen der $z_1, z_2, \ldots z_6$ sein könnten.

3. Wir wollen die homogenen Valentinersubstitutionen fortan so fixieren, daß ihre Determinante durchweg gleich *Eins* ist. Ihre Zahl beträgt dann genau $3.360 = 1080$ und es entsprechen der identischen Kollineation die drei Substitutionen:

$$(16.) \qquad x_1' = j^\nu x_1, \quad x_2' = j^\nu x_2, \quad x_3' = j^\nu x_3. \qquad \left(j = e^{\frac{2i\pi}{3}};\ \nu = 0, 1, 2\right)$$

4. Wir bemerken jetzt, daß bei diesen 1080 homogenen Substitutionen die zehn Glieder dritter Ordnung, die man aus den x aufbauen kann:

$$x_1^3, \quad x_1^2 x_2, \ldots$$

---

sei) ohne besondere Mühe zu derselben Form Ω gelangen, die ich unten unter (19.) mitteile. Man hat nur zu beachten, daß die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_6$ der Gleichung sechsten Grades, und ebenso deren Quadrate $z_1^2, z_2^2, \ldots z_6^2$ nach den Entwicklungen von Bd. 28 im Raume einen linearen Komplex festlegen, und daß diese beiden Komplexe zusammen mit dem ebendort eingeführten „Einheitskomplex“ durch ihre gemeinsamen Linien eine *Fläche zweiten Grades* bestimmen. Irgend eine akzessorische Irrationalität tritt hierbei noch nicht auf. Es ist dann in keiner Weise nötig, sich beim Übergang vom Raum zur Ebene so, wie es Herr *Lachtin* tut, auf die verhältnismäßig komplizierten Formeln zu beziehen, durch welche ich, in Bd. 28, den Wurzeln $z_1, \ldots z_6$ einen Raum*punkt* zugeordnet habe. Also auch in dieser Hinsicht kann der Ansatz von Herrn *Lachtin* noch abgekürzt werden.

ihrerseits nur 360 lineare Substitutionen erleiden (deren Gruppe mit der Gruppe der geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \ldots z_6$ holoedrisch isomorph sein wird).

5. Wir bilden nun ferner eine beliebige kubische ternäre Form

$$a_{111}\, x_1^3 + 3\, a_{112}\, x_1^2 x_2 + \cdots$$

(die, gleich 0 gesetzt, eine „*Kurve dritter Ordnung*“ in der Ebene der x darstellt). Die Koeffizienten $a_{111}, 3a_{112}, \ldots$ verhalten sich bei beliebigen linearen Substitutionen der x_1, x_2, x_3 zu den $x_1^3, x_1^2 x_2, \ldots$ *kontragredient*. Sie erleiden also bei den Substitutionen der Valentinergruppe ebenfalls genau 360 lineare Substitutionen, die mit den 360 geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \ldots z_6$ eineindeutig zusammengeordnet werden können.

6. Wir schließen hieraus, daß es ohne weiteres möglich ist, zehn rationale Polynome der frei veränderlichen Größen $z_1, z_2, \ldots z_6$ zu bilden:

$$\varphi_{111}, \varphi_{112}, \cdots,$$

welche sich bei den geraden Vertauschungen der z genau so substituieren, wie die

$$a_{111}, \; a_{112}, \cdots$$

bei den korrespondierenden Substitutionen der Valentinergruppe, — also den Wurzeln z, wie wir es kurz ausdrücken, in rationaler Weise eine Kurve dritter Ordnung *kovariant* zuzuordnen.

7. Um es anders auszudrücken: Man kann auf mannigfache Weise, ohne Benutzung akzessorischer Irrationalitäten,*) *eine von den z und x abhängige, in den x kubische Form bilden*:

$$\Omega(z_1 \ldots z_6 | x_1 x_2 x_3) = \varphi_{111} \cdot x_1^3 + 3\, \varphi_{112} \cdot x_1^2 x_2 \ldots, \tag{17.}$$

welche ungeändert bleibt, wenn man auf $x_1 x_2 x_3$ die Valentinersubstitutionen und gleichzeitig auf die $z_1 \ldots z_6$ die korrespondierenden geraden Vertauschungen ausübt.

8. Was die wirkliche Herstellung einer solchen Form Ω angeht, so unterlasse ich wieder, den allgemeinen aber weitläufigen Prozeß heranzuziehen, den ich für alle derartige Aufgaben in Bd. 15 der Mathematischen

*) Abgesehen natürlich von den numerischen Irrationalitäten, welche in den Substitutionen der Valentinergruppe auftreten. Es sind dies (in Übereinstimmung mit den im Texte folgenden Formeln (18.) usw.) die Quadratwurzeln $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{5}$.

Annalen gab, sondern entwickele, genau wie bei den Gleichungen fünften Grades an der entsprechenden Stelle, eine abgekürzte Methode, die sich (im Laufe des vergangenen Winters) aus meiner Korrespondenz mit Herrn *Gordan* ergeben hat. Man hat folgende Beziehungen zu kombinieren:

8a. Bei den 360 Kollineationen der Valentinergruppe spielen, wie zuerst Herr *Wiman* nachwies, zwei Systeme von je sechs Kegelschnitten eine wichtige Rolle. *Die sechs Kegelschnitte jedes der beiden Systeme vertauschen sich bei den 360 Kollineationen auf 360 Weisen unter sich.*

8b. Die Gleichungen dieser 2·6 Kegelschnitte sind (bei Zugrundelegung eines geeigneten kanonischen Koordinatensystems) zuerst von Herrn *Gerbaldi* aufgestellt worden (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane, I;* vergl. auch die bereits 1882 in den Atti di Torino, Bd. XVII, S. 358ff. veröffentlichte Note: *Sui gruppi di sei coniche in involuzione*). Ich will hier die korrespondierenden ternären quadratischen Formen, indem ich mich auf das eine System von 6 Kegelschnitten beschränke, nach dem Vorgange von Herrn *Gordan* gleich mit der Determinante 1 ausstatten. Wir können dann schreiben:

$$(18.)\quad \begin{cases} k_1 = x_1^2 + j x_2^2 + j^2 x_3^2, \\ k_2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j x_3^2, \\ k_3 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2), \\ k_4 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2), \\ k_5 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2), \\ k_6 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2). \end{cases}$$

8c. Die $k_1, \ldots k_6$ sind durch die Forderung, daß ihre Determinante gleich 1 sein soll, nur je bis auf eine dritte Einheitswurzel bestimmt. In der Tat vertauschen sich auch die vorstehenden k bei den 1080 Valentinersubstitutionen unter Multiplikation mit geeigneten dritten Einheitswurzeln.

8d. Wir wollen nunmehr aus irgend drei der k:

$$k', k'', k'''$$

eine in deren Koeffizienten trilineare Kovariante und eine desgl. Invariante bilden. — Als erstere wählen wir die *Funktionaldeterminante* $|k'k''k'''|$, die

bei Vertauschung zweier k ihr Vorzeichen wechselt. Als Invariante nehmen wir eine symmetrische Verbindung der Koeffizienten der drei k, nämlich denjenigen Ausdruck, der bei der Entwicklung der Koeffizientendeterminante der Form $\lambda' k' + \lambda'' k'' + \lambda''' k'''$ mit $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ multipliziert erscheint. Ich will denselben hier vorübergehend mit $(k' k'' k''')$ bezeichnen; es ist dies im vorliegenden Falle eine einfache numerische Größe.

8e. Wir bilden jetzt, für alle möglichen Tripel k', k'', k''', den Quotienten

$$\frac{|k' k'' k'''|}{(k' k'' k''')}.$$

Man zeigt, *daß die 20 so erhaltenen Terme sich bei den 1080 Substitutionen der Valentinergruppe genau so unter ev. Vorzeichenänderung vertauschen, wie die 20 Differenzenprodukte*

$$(z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'')$$

bei den korrespondierenden geraden Vertauschungen der z.

8f. Daher haben wir in der über alle Tripel erstreckten Summe

$$(19.) \qquad \Sigma (z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'') \cdot \frac{|k' k'' k'''|}{(k' k'' k''')}$$

ein einfaches Beispiel einer solchen Form

$$\Omega (z_1 \dots z_6 | x_1 x_2 x_3),$$

wie wir sie in Nr. 7 suchten.

8g. Allgemeinere Beispiele (die wir im folgenden indes nicht brauchen) erhält man, wenn man in (19.) statt des Differenzenprodukts der z', z'', z''' irgend eine Determinante

$$\begin{vmatrix} z'^{\alpha} & z''^{\alpha} & z'''^{\alpha} \\ z'^{\beta} & z''^{\beta} & z'''^{\beta} \\ z'^{\gamma} & z''^{\gamma} & z'''^{\gamma} \end{vmatrix}$$

einsetzt.

8h. Ordnen wir jetzt die Summe (19.) nach den sukzessiven Gliedern $x_1^3, x_1^2 x_2, \dots$, indem wir wie in Formel (17.) schreiben:

$$(20.) \qquad \Sigma = \varphi_{111} \cdot x_1^3 + 3 \varphi_{112} \cdot x_1^2 x_2 + \cdots,$$

so haben wir in den $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \dots$ genau solche rationale Funktionen der $z_1, \dots z_6$, wie wir sie in Nr. 6 suchten.

9. Es wird nun darauf ankommen, der *Kurve dritter Ordnung*

(21.) $$\Sigma = 0$$

(deren Koeffizienten rational von den z abhängen) einen Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ unter Heranziehung möglichst niedriger akzessorischer Irrationalitäten *in kovarianter Weise* zuzuordnen.

10. Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung bietet hierzu verschiedene Möglichkeiten. Ich will hier der Kürze halber, wie ich es in meiner römischen Note tat, einen *Wendepunkt* der Kurve dritter Ordnung wählen.

11. In der Tat verlangt die Bestimmung eines solchen Wendepunktes nach der bekannten Theorie von *Hesse* nur solche Irrationalitäten, welche man bei der Auflösung der Gleichungen sechsten Grades als niedere Irrationalitäten ansehen kann: Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. (Die Einzelheiten sollen hier unerörtert bleiben.)

12. Andererseits ist der Wendepunkt mit der Kurve dritter Ordnung gewiß in kovarianter Weise verknüpft: wenn man auf die Kurve und den auf ihr gewählten Wendepunkt irgend eine Kollineation ausübt, so wird man auf der entstehenden neuen Kurve unter den neun überhaupt auf ihr vorhandenen Wendepunkten jedesmal einen bestimmten erhalten. Es gilt dies insbesondere von den 360 Kollineationen der Valentinergruppe.

13. Wir denken uns jetzt in die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ des von uns gewählten Wendepunktes statt der Koeffizienten $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \ldots$ der Kurve dritter Ordnung ihre aus (20.) resultierenden Werte in den $z_1, \ldots z_6$ eingetragen.

14. Wenn wir in diesen Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ die $z_1, \ldots z_6$ beliebig in gerader Weise vertauschen, erleiden sie die eindeutig bestimmten Kollineationen der Valentinergruppe.

Wir schließen daraus, daß die rationalen Funktionen der $z_1, \ldots z_6$, welche nach Anbringung aller Reduktionen in den Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ unterhalb der auftretenden Quadratwurzeln und Kubikwurzeln verbleiben, bei den geraden Vertauschungen der z ungeändert bleiben. Sie können also als rationale Funktionen der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante dargestellt werden.

15. Daher werden wir die bei der Ausrechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten mit Fug und Recht als akzessorische Irrationalitäten *niederen Charakters* bezeichnen dürfen.

16. Wir haben also mit der Berechnung der Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ eines Wendepunktes unserer C_3 in der Tat der Aufgabe entsprochen, auf die es hier ankam: *aus den frei veränderlichen z unter Adjunktion akzessorischer Irrationalitäten elementaren Charakters Größen* $x_1 : x_2 : x_3$ *zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentinergruppe erleiden.*

Dies ist die Ausführung des speziellen Inhaltes meiner römischen Note, welche ich hier zu geben dachte.*)

Man wird vielleicht noch eine genauere Auseinandersetzung der in Nr. 14 benutzten Schlußweise wünschen. Am einfachsten wäre es, an der Kurve (21.) die bekannten Gleichungen, die zur Bestimmung eines Wendepunktes einer Kurve dritter Ordnung führen, alle durchzurechnen und die Richtigkeit der Behauptung damit tatsächlich zu bestätigen. Im übrigen kann man, wie mir Herr *Gordan* bemerkt, die ganze Schwierigkeit der Schlußfolgerung folgendermaßen umgehen. Man stelle einfach die Gleichung neunten Grades auf, der die neun Werte genügen, welche eine absolute Invariante der Valentinergruppe (z. B. das sogleich zu nennende v) in den neun Wendepunkten annimmt! Diese Gleichung muß für alle 360 Kurven dritter Ordnung (welche durch die Substitutionen der Valentinergruppe und also durch gerade Vertauschung der z aus einander hervorgehen) dieselbe sein. Ihre Koeffizienten sind also nach Wegwerfung gleichgültiger Faktoren selbst solche rationale Funktionen der z, welche sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändern. Dabei kann der Affekt dieser Gleichung neunten Grades kein anderer sein, als der der ursprünglichen Wendepunktsgleichung. Sie wird also ebenfalls durch Quadratwurzeln und Kubikwurzeln gelöst, unter denen dann aber selbstverständlicherweise nur solche rationale Funktionen der z stehen, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändern. Adjungieren wir jetzt einen der so resultierenden neun Werte unserer absoluten Invariante (also etwa des v), so wird sich aus ihm und der Gleichung (21.) der Kurve dritter Ordnung, bezw. der Gleichung ihrer *Hesse*schen Kurve, der zugehörige einzelne Wendepunkt $x_1 : x_2 : x_3$ rational

*) Der Schlußsatz der Note ist beim Abdruck in den Rendiconti der Accademia dei Lincei durch eine merkwürdige Umstellung unverständlich geworden. Es soll heißen: „E cosi, col sussidio di irrazionalità accessorie, che si suole riguardare come elementare, si parviene alla meta.“ Statt dessen ist gedruckt: „E cosi, col sussidio di irrazionalità accessorie, si parviene alla meta, che si suole riguardare come elementare.“

berechnen. Und damit ist die Behauptung der Nr. 14, betreffend die bei der Berechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten, von selbst mit bewiesen.

Die weitere Behandlung der Gleichungen sechsten Grades wird nun ohnehin in der Weise erfolgen müssen, daß wir für den herausgegriffenen Wendepunkt unserer Kurve dritter Ordnung die absoluten Invarianten der Valentinergruppe berechnen. Nach den Angaben von Herrn *Wiman* hat die Valentinergruppe drei niedrigste Invarianten:

$$F,\ H,\ \Phi \tag{22.}$$

beziehungsweise von den Graden 6, 12 und 30 in den x_1, x_2, x_3. Aus ihnen setzen sich die beiden fundamentalen absoluten Invarianten zusammen, die ich im Anschlusse an die sogleich zu nennende Arbeit von Herrn *Lachtin* hier mit v und w bezeichne:

$$v = \frac{\Phi}{F^5}, \qquad w = \frac{H}{F^2}. \tag{23.}$$

Tragen wir hier für $x_1 : x_2 : x_3$ die Koordinaten unseres Wendepunktes ein, so werden die v, w rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante bezw. der zwischendurch eingeführten akzessorischen Irrationalitäten. *Die Berechnung der $x_1 : x_2 : x_3$ aus den somit bekannten v, w ist das Normalproblem, auf welches wir die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades reduzieren.* Es ist, sowie es nun vor uns steht, ein Problem mit *zwei* willkürlichen Parametern, dadurch ausgezeichnet, daß sich alle seine 360 Lösungssysteme $x_1 : x_2 : x_3$ aus einem beliebigen derselben durch die 360 von vornherein bekannten Kollineationen der Valentinergruppe ergeben. Irgend eine Methode, die Parameterzahl mit Hilfe fernerer niederer Irrationalitäten auf Eins herabzudrücken, ist nicht zur Hand. Versucht man beispielsweise dem Wendepunkte $x_1 : x_2 : x_3$, den wir auswählten, einen Punkt $x_1' : x_2' : x_3'$ der Kurve sechster Ordnung $F = 0$ in kovarianter Weise zuzuordnen und damit statt des Normalproblems (23.) das folgende zu setzen:

$$F' = 0, \qquad t' = \frac{\Phi'^2}{H'^5}, \tag{24.}$$

so stößt man bei dem gewöhnlichen Ansatze (Schnitt der Kurve $F = 0$ mit einer vom Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ kovariant abhängenden geraden Linie) auf eine Hilfsgleichung, die selbst wieder vom sechsten Grade ist!

Der Vollständigkeit wegen verlangen wir endlich noch Umkehrformeln aufzustellen, d. h. die Wurzeln $z_1, \ldots z_6$ der vorgelegten Gleichung sechsten Grades durch das einzelne Lösungssystem $x_1 : x_2 : x_3$ von (23.) und die als bekannt vorausgesetzten Größen rational zu berechnen. *Hiermit ist der algebraische Teil der von uns hier zu skizzierenden Auflösung der Gleichungen sechsten Grades vollständig umschrieben.*

Der transzendente Teil aber wird verlangen, *aus den Gleichungen* (23.) *die* $x_1 : x_2 : x_3$ *irgendwie durch unendliche Prozesse wirklich zu berechnen.* Einen ersten Ansatz hierzu macht Herr *Lachtin* in einer umfangreichen Arbeit, welche zuerst russisch (1901) im 22. Bande der Moskauer Mathematischen Sammlung und dann 1902 in deutscher Bearbeitung in Bd. 56 der Mathematischen Annalen erschienen ist.*)

Schreiben wir:

$$(25.) \qquad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[6]{F}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[6]{F}}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\sqrt[6]{F}},$$

so erweisen sich die y als Lösungssystem von drei simultanen partiellen Differentialgleichungen, welche die drei zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$$

durch die beiden ersten $\left(\frac{\partial y}{\partial v} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial w}\right)$ und das y selbst linear ausdrücken. Herr *Lachtin* hat l. c. gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen rationale ganze Funktionen der absoluten Invarianten v, w sind, die gewisse angebbare Grade nicht übersteigen. Dagegen hat er die numerischen Koeffizienten dieser Polynome nicht ausgerechnet. Die hier verbleibende Lücke wird nun gerade durch die Arbeit des Herrn *Gordan*, auf die ich im Eingang dieses Briefes verweise, ausgefüllt. *In der Tat ist es Herrn Gordan dort gelungen, die in Rede stehenden partiellen Differentialgleichungen explizite aufzustellen.* Es ist damit ermöglicht, die y_1, y_2, y_3 nach Potenzen von v und w oder auch von beliebigen linearen Funktionen von v resp. w in Reihen zu entwickeln, und es kann dann nicht mehr schwer sein, die Bereiche zu bestimmen, in denen die verschiedenartigen

*) *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art.* (Mathem. Ann. Bd. 56, S. 445—481.)

so entstehenden Reihen konvergieren, — *also das transzendente Problem in direkter Weise zu lösen.*

Der Vollständigkeit wegen muß hinzugefügt werden, daß das spezielle, durch die Gleichungen (24.) vorgestellte Normalproblem bereits eingehender funktionentheoretisch diskutiert ist. Herr *Fricke* hat 1896 auf der Frankfurter Naturforscherversammlung die der Valentinergruppe entsprechende Zerlegung der zur Kurve $F=0$ gehörenden *Riemann*schen Fläche (vom Geschlecht 10) in Fundamentalbereiche behandelt und eine nahe Beziehung derselben zur Zerlegung der Halbebene in Kreisbogendreiecke von den Winkeln

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{5}$$

bemerkt.*) Herr *Lachtin* hat dann 1898 im 51. Bande der mathematischen Annalen**) diese Angaben bestätigt und die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, welcher — im Falle der Gleichungen (24.) — die mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Größen x_ν in bezug auf den Parameter t genügen.

Ich bin am Ende meiner Darlegungen. Die Analogie der vorgeschlagenen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades mit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch die Ikosaedergleichung tritt, hoffe ich, überzeugend hervor. Eine feinere Durchführung der Einzelheiten, wie sie für die Gleichungen fünften Grades seinerzeit von Herrn *Gordan* und mir gegeben wurde und in geometrischer Form in meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ zur Darstellung gelangte, muß vorbehalten werden.

---

*) Vergl. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. V: *Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen.*

**) *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung.* (Math. Ann. Bd. 51, S. 463—472.)

Zur Theorie der linearen Gleichungen.

Von Herrn *G. Frobenius* in Berlin.

Die Bedingungen für die Auflösbarkeit eines Systems nichthomogener linearer Gleichungen sind in allgemeiner Form zuerst von *Fontené* (Théorème pour la discussion d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Nouv. Ann. (2) t. 14, 1875) und von *Rouché* (Sur la discussion des équations du premier degré. Comptes Rendus, tome 81, 1875), bald darauf von mir (Über das *Pfaff*sche Problem, dieses Journal Bd. 82 am Ende des § 3; 1876) ausgesprochen worden. Sie lassen sich bequemer formulieren mit Hilfe des Begriffes *Rang* einer Matrix oder einer Determinante, dessen Bedeutung für die Theorie der linearen Gleichungen ich ebenda zuerst klargelegt habe. Auch den Namen *Rang* habe ich in der Arbeit „Über homogene totale Differentialgleichungen", dieses Journal Bd. 86, § 1, zuerst eingeführt, während ich mich bis dahin mit etwas weitläufigen Umschreibungen beholfen hatte. Wie sich mittels dieses Begriffes die obigen Bedingungen ausdrücken, habe ich in meiner Arbeit „Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten", dieses Journal Bd. 86 (§ 10, Satz III) ausgesprochen.

Sind

$$(1.) \qquad u_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

beliebig viele homogene lineare Funktionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen gleich dem Range r ihres Koeffizientensystems

$$(2.) \qquad a_{\alpha\beta}. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n;\ \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

Der Einfachheit halber setze ich die r ersten Funktionen als unabhängig voraus. Demnach sind die linearen Gleichungen $u_{r+1} = 0$, $u_{r+2} = 0, \ldots$ eine

Folge der r unabhängigen Gleichungen

$$(3.) \qquad a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots r)$$

Es sei

$$x_1 = b_{\alpha 1},\ x_2 = b_{\alpha 2},\ \ldots\ x_n = b_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein *vollständiges* System von Lösungen dieser Gleichungen.

Dann hat das Koeffizientensystem

$$(4.) \qquad b_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n;\ \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

den Rang $s = n - r$. Infolge der Gleichungen

$$(5.) \qquad a_{\alpha 1} b_{\beta 1} + a_{\alpha 2} b_{\beta 2} + \cdots + a_{\alpha n} b_{\beta n} = 0$$

und der Beziehung $r = n - s$ bilden auch die Größen

$$x_1 = a_{\alpha 1},\quad x_2 = a_{\alpha 2},\quad \ldots\ x_n = a_{\alpha n}$$

ein vollständiges System von Lösungen der linearen Gleichungen

$$(6.) \qquad v_\alpha = b_{\alpha 1} x_1 + b_{\alpha 2} x_2 + \cdots + b_{\alpha n} x_n = 0. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

Daher habe ich die beiden Systeme linearer Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ adjungierte Systeme genannt, ebenso die beiden Systeme linearer Gleichungen (3.) und (6.), und endlich auch die Systeme ihrer Koeffizienten (2.) und (4.). Auch von den Funktionen v_α will ich annehmen, daß die s ersten von einander unabhängig sind.

Die beiden adjungierten Matrizen

$$(R.) \qquad a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n;\ \beta = 1, 2, \ldots r)$$

und

$$(S.) \qquad b_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n;\ \beta = 1, 2, \ldots s)$$

haben folgende Eigenschaft: Die Determinanten r-ten Grades der Matrix R verhalten sich wie die komplementären Determinanten s-ten Grades der adjungierten Matrix S. (*Jacobi*, de formatione et proprietatibus Determinantium, § 11 (12.), dieses Journal Bd. 22.)

Diesen Satz habe ich in § 3 meiner Arbeit „Über das *Pfaff*sche Problem“ hergeleitet, und ich habe bald nachher die im folgenden entwickelte zweite Eigenschaft der komplementären Teile von zwei adjungierten Matrizen gefunden, und in einer Vorlesung behandelt, wovon sich ebenda am Ende des § 3 die erste Spur findet.

Daß die Matrix R aus r Zeilen und n Spalten besteht, will ich, wenn es die Deutlichkeit erfordert, durch das Zeichen $R_{r,n}$ andeuten. Jede der beiden adjungierten Matrizen $R_{r,n}$ und $S_{s,n}$, wo

$$r+s=n \tag{7.}$$

ist, teile ich in entsprechender Weise in zwei Teilmatrizen, indem ich in beiden etwa die ersten r' Spalten von den letzten s' Spalten absondere. Demnach ist auch

$$r'+s'=n. \tag{8.}$$

Die beiden Teile von R bezeichne ich mit A und B, die von S mit C und D. Das Schema

$$\begin{cases} R_{r,n}=A_{r,r'} \mid B_{r,s'} \\ S_{s,n}=C_{s,r'} \mid D_{s,s'} \end{cases} \tag{9.}$$

möge diese Zerlegung zur Anschauung bringen. Man kann auch A und D (und ebenso B und C) als *komplementäre* Teilmatrizen bezeichnen.

Wenn nun die Matrizen A und D die Rangzahlen ϱ und σ haben, so ist der zu beweisende Satz in der Gleichung

$$\varrho-\sigma = r-s' = r'-s \tag{10.}$$

ausgesprochen. Vielleicht liegt in dem nur scheinbaren Mangel an Symmetrie, den diese Formel aufweist, der Grund, daß dieser merkwürdige Satz trotz seines überaus elementaren Charakters der Aufmerksamkeit der Forscher meines Wissens bisher entgangen ist. Man kann sich seinen Inhalt auch in folgender Art zurechtlegen:

Ist etwa $r \leqq r'$, so ist $s \geqq s'$, weil $r+s=r'+s'=n$ ist. Dann ist im allgemeinen der Rang der Matrix $A_{r,r'}$ gleich r, der von $D_{s,s'}$ gleich s'. In besonderen Fällen kann aber der Rang von A kleiner als r, etwa $\varrho=r-t$ sein. Dann ist auch der Rang von D gleich $\sigma=s'-t$. Dasselbe gilt aber auch, wenn $r \geqq r'$ und $s \leqq s'$ ist. Ist der Rang von A um t kleiner, als er nach der Anzahl der Zeilen und Spalten von A höchstens sein kann, so ist auch der Rang der komplementären Matrix D um ebenso viel kleiner, als er höchstens sein kann.

Um den Satz zu beweisen, betrachte ich die r linearen Gleichungen

$$a_{\alpha 1}x_1+ \cdots +a_{\alpha r'}x_{r'}=0. \qquad (\alpha=1,2,\ldots r) \tag{11.}$$

Die Matrix ihrer Koeffizienten ist A, ihr Rang ϱ. Ist

$$x_1 = b_1, \ \ldots\ldots \ x_{r'} = b_{r'} \tag{12.}$$

eine ihrer Lösungen, so ist

$$x_1 = b_1, \ldots x_{r'} = b_{r'}, \ x_{r'+1} = 0, \ldots x_n = 0 \tag{13.}$$

eine Lösung der Gleichungen (3.). Ist umgekehrt (13.) eine Lösung der Gleichungen (3.), so ist (12.) eine solche für die Gleichungen (11.). Sind

$$\begin{aligned} &b_1, \ \ldots\ldots \ b_{r'}, \\ &c_1, \ \ldots\ldots \ c_{r'}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

mehrere unabhängige Lösungen der Gleichungen (11.), so sind auch

$$\begin{aligned} &b_1, \ldots b_{r'}, \ 0, \ldots 0 \\ &c_1, \ldots c_{r'}, \ 0, \ldots 0 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

ebenso viele unabhängige Lösungen der Gleichungen (11.), und umgekehrt. Nun sind unter den Gleichungen (11.) genau ϱ unabhängig, und da die Anzahl der Unbekannten r' ist, so besitzen sie genau $r' - \varrho$ unabhängige Lösungen. Es gibt also genau $r' - \varrho$ unabhängige Verbindungen der Lösungen

$$b_{\alpha 1}, \ \ldots \ b_{\alpha n}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots s)$$

worin $b_{r'+1} = \cdots = b_n = 0$ ist. Ist

$$b_1 = \Sigma\, b_{\alpha 1}\, z_\alpha, \ \ldots \ b_n = \Sigma\, b_{\alpha n}\, z_\alpha \tag{14.}$$

eine solche Verbindung, so genügen $z_1, \ldots z_s$ den $n - r'$ Gleichungen

$$\Sigma\, b_{\alpha, r'+1}\, z_\alpha = 0, \ \ldots \qquad \Sigma\, b_{\alpha n}\, z_\alpha = 0. \tag{15.}$$

Die Matrix ihrer Koeffizienten ist D (genauer die zu D konjugierte Matrix D'), ihr Rang ist σ. Diese Gleichungen zwischen den s Unbekannten $z_1, \ldots z_s$ besitzen demnach $s - \sigma$ unabhängige Lösungen.

Vermöge der Formeln (14.) entsprechen ihnen ebenso viele Lösungen der Gleichungen (11.) und auch diese $s - \sigma$ Lösungen sind unabhängig: Denn sonst könnte man eine lineare Verbindung $z_1, \ldots z_s$ von $s - \sigma$ unabhängigen Lösungen der Gleichungen (15.) so bestimmen, daß die entsprechenden Werte $b_1, \ldots b_n$ alle Null wären, nicht nur die $n - r'$ letzten $b_{r'+1}, \ldots b_n$. Die s Größen $z_1, \ldots z_s$ würden also den n Gleichungen

$$\Sigma b_{\alpha 1} z_\alpha = 0, \quad \ldots \quad \Sigma b_{\alpha n} z_\alpha = 0$$

genügen. Da aber unter diesen Gleichungen s unabhängige sind, so muß $z_1 = \cdots = z_s = 0$ sein.

Demnach giebt es genau $s - \sigma$ unabhängige Verbindungen der Lösungen (4.), wofür $b_{r'+1} = \cdots = b_n = 0$ ist. Da aber diese Anzahl oben gleich $r' - \varrho$ gefunden wurde, so ist $r' - \varrho = s - \sigma$. Der Satz bleibt unverändert gültig, wenn statt der Matrizen R und S die Matrizen (2.) und (4.) genommen werden.

Das Kriterium für die Auflösbarkeit nichthomogener linearer Gleichungen ist ein spezieller Fall des abgeleiteten Satzes. Sollen die nichthomogenen Gleichungen

(16.) $$a_{\alpha 0} = a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Lösung besitzen, so müssen die homogenen Gleichungen

$$a_{\alpha 0} x_0 + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0$$

eine Lösung haben, worin x_0 von Null verschieden ist. Teilt man also die Matrix R ihrer Koeffizienten und die Matrix S ihrer Lösungen

$$b_{\alpha 0}, b_{\alpha 1}, \quad \ldots \quad b_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

in je zwei Teile, $R = A|B$ und $S = C|D$, indem man die erste Spalte von den n letzten Spalten absondert, so haben die Gleichungen (16.) eine Lösung, wenn der Rang von C $\varepsilon = 1$ ist, aber keine, wenn $\varepsilon = 0$ ist. Ist nun r' der Rang der Matrix R

(17.) $$a_{\alpha 0}, a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

und r der der Matrix B

(18.) $$a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n},$$

so ist nach dem entwickelten Satze $r' - r = 1 - \varepsilon$. Die Gleichungen (16.) haben also eine Lösung, wenn $r' = r$ ist, aber keine, wenn $r' = r + 1$ ist.

Anmerkung.

Ich benutze diesen Anlaß, um eine Angabe der Édition française de l'Encyclopédie, Tome I, vol. I, Fasc. I, pag. 90 richtig zu stellen. Die bekannte Definition der Determinante als Funktion von n^2 unabhängigen

Variabeln durch drei charakteristische Eigenschaften wird dort *Kronecker* zugesprochen. Denselben Sinn hat wohl in der deutschen Ausgabe der Enzyklopädie die Wendung: *Kronecker* legte in seinen Vorlesungen eine funktionentheoretische (Erklärung der Determinanten) zugrunde.

Diese Definition rührt aber von *Weierstraß* her, wie alle seine Schüler wissen. Er hat sie schon seit 1864 (oder vielleicht noch früher) im mathematischen Seminar und in seinen Vorlesungen benutzt. Noch 10 Jahre später verhielt sich *Kronecker* gegen diese funktionentheoretische Definition recht ablehnend. Die Erweiterung auf rechteckige Matrizen, die zum Beweise des allgemeinen Multiplikationstheorems und des *Laplace*schen Zerlegungssatzes dient, habe ich (soviel ich weiß, zum ersten Male) in einer Vorlesung gegeben, die ich im Sommer 1874 in Berlin über Determinantentheorie gehalten habe.

Ein Beweis des Satzes, daß jede Klasse von ganzzahligen primitiven binären quadratischen Formen des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht.

Von Herrn *F. Mertens* in Wien.

In der von *Gauß* geschaffenen Lehre von den Geschlechtern der ganzzahligen binären quadratischen Formen ist der Satz von grundlegender Bedeutung, daß jede primitive Form mit durchweg positiven Charakterwerten einer Form äquivalent ist, welche durch Duplikation entsteht. *Gauß* beweist diesen Satz mit Hilfe der ternären quadratischen Formen. Es sind jedoch Beweise wünschenswert, welche nur Mittel aus dem Gebiete der binären Formen in Anspruch nehmen. Ein solcher Beweis soll in dem Folgenden gegeben werden.

Eine binäre quadratische Form soll in der Gestalt

$$ax^2+\frac{2b}{\sigma}xy+cy^2=\left(a,\frac{b}{\sigma},c\right)$$

angenommen und von der Art σ genannt werden, wo σ den Wert 1 oder 2 hat, je nachdem der mittlere Koeffizient $\frac{2b}{\sigma}$ gerade oder ungerade ist.

Eine aus zwei oder mehr primitiven Formen $f, g, \ldots$ derselben Determinante und Art durch Zusammensetzung hervorgehende Form soll mit $fg\ldots$ bezeichnet werden. Eine Form ff möge kurz ein Formenquadrat heißen.

Es sei

$$f=\left(m,\frac{b}{\sigma},c\right)$$

eine primitive Form σ-ter Art der Determinante D mit durchweg positiven Charakterwerten. Man bezeichne die Anzahlen der Charaktere und Primfaktoren von D mit ϱ, π und nenne die Zahl $\varrho+\pi$ die Stufe der Determinante D.

Setzt man alle Formen eines vollständigen Systems primitiver Formen σ-ter Art der Determinante D mit sich selbst zusammen, sucht aus den erhaltenen Formenquadraten alle unäquivalenten aus und bezeichnet ihren Inbegriff mit Q, den Inbegriff der Formen, welche aus der Zusammensetzung der Form φ mit den Formen von Q hervorgehen, mit $Q\varphi$, so gibt es Formen

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{\mathfrak{a}-1}$$

von der Beschaffenheit, daß die Inbegriffe

$$Q\varphi_0, Q\varphi_1, \cdots Q\varphi_{\mathfrak{a}-1}$$

ein vollständiges System der genannten Art bilden; $\mathfrak{a}$ ist die Anzahl $2^{\varrho-1}$ der ambigen Klassen.

Der zu beweisende Satz ist für alle Determinanten erster und zweiter Stufe selbstverständlich. Denn für solche Determinanten ist $\varrho=1$ und Q ein vollständiges Formensystem. Man darf daher bei dem Beweise des Satzes für Determinanten von der Stufe s annehmen, daß derselbe bereits für Determinanten geringerer Stufe feststeht.

Ferner darf angenommen werden, daß der erste Koeffizient der Form f positiv, zu $2D$ teilerfremd, quadratfrei ist und weniger als ϱ Primfaktoren besitzt. Denn man kann, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, eine Form g mit den gewünschten Eigenschaften und ein Formenquadrat $\chi\chi$ von der Art angeben, daß f mit $g\chi\chi$ äquivalent ist. Die Form g hat durchweg positive Charakterwerte und es genügt, den Beweis für g zu führen.

Man kann zunächst eine mit f äquivalente Form f' ermitteln, deren erster Koeffizient positiv und zu $2D$ teilerfremd ist. Zerlegt man denselben in ein Quadrat e_1^2 und einen quadratfreien Faktor r_1, so ist f' aus einem Formenquadrat $\omega\omega$ und einer Form f_1 zusammengesetzt, deren erster Koeffizient r_1 ist, und f ist mit $f_1\omega\omega$ äquivalent.

Besitzt nun schon r_1 weniger als ϱ Primfaktoren, so kann $g=f_1$ gesetzt werden.

Besitzt dagegen r_1 mehr als $\varrho-1$ Primfaktoren und infolgedessen

mindestens $2\mathfrak{a}$ verschiedene Teiler, so gibt es $2\mathfrak{a}$ primitive Formen σ-ter Art der Determinante D, welche solche Teiler zu ersten Koeffizienten haben. Unter diesen Formen müssen daher wenigstens zwei vorkommen, etwa g', g'', welche Formen $\varphi_i g_1 g_1, \varphi_i g_2 g_2$ aus demselben Inbegriffe $Q\varphi_i$ äquivalent sind. Ist $r_2 e_2^2$ der erste Koeffizient der Form $f_1 g' g''$, e_2^2 das in demselben enthaltene größte Quadrat, so besitzt r_2 weniger Primfaktoren als r_1 und $f_1 g' g''$ ist einer Form äquivalent, welche aus der Zusammensetzung eines Formenquadrats $g_0 g_0$ und einer Form f_2 mit dem ersten Koeffizienten r_2 hervorgeht. Sind $\varphi_i^{-1}, g_1^{-1}, g_2^{-1}$ die entgegengesetzten Formen von φ_i, g_1, g_2 und setzt man

$$\omega g_0 \varphi_i^{-1} g_1^{-1} g_2^{-1} = \omega_1,$$

so ist $f_1 \omega \omega$ und daher auch f mit $f_2 \omega_1 \omega_1$ äquivalent.

Besitzt nun schon r_2 weniger als ϱ Primfaktoren, so kann $g = f_2$ gesetzt werden; wenn nicht, so ist das Verfahren fortzusetzen, bis man auf die gewünschte Form stößt.

Ist $m = 1$, so ist f der Hauptform σ-ter Art

$$H = \left(1, \frac{\sigma - 1}{\sigma}, \frac{(\sigma-1)^2 - D}{\sigma^2}\right)$$

äquivalent und es bedarf keines Beweises.

Ist $m > 1$, so sei $\sigma_1 = 2$ oder $= 1$, je nachdem zugleich D gerade und $m \equiv 1 \pmod 8$ ist oder nicht.

Die Kongruenz

$$z^2 \equiv m \pmod{p^r}$$

ist für jede in $D\sigma_1^2$ genau aufgehende Primzahlpotenz p^r lösbar.

Denn bei ungeradem p ist

$$\left(\frac{m}{p}\right) = 1,$$

weil m durch f darstellbar ist.

Die Primzahl 2 kommt nur bei geradem D in Betracht. Ist $\sigma_1 = 2$, so ist

$$m \equiv 1 \pmod 8.$$

Ist aber $\sigma_1 = 1$, so ist entweder

$$D \equiv \pm 2 \pmod 8 \qquad (r = 1)$$

oder

$$D \equiv 4 \pmod 8 \qquad (\nu = 2)$$

und m hat die Gestalt $4h+1$, weil D den Charakter $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ besitzt. In allen diesen Fällen ist die Kongruenz lösbar.

Da hiernach die Kongruenz

$$v^2 \equiv m \pmod{D\sigma_1^2}$$

lösbar und jede ihrer Wurzeln zu σ_1 teilerfremd ist, so kann eine Form

$$\psi = \left(D, \frac{v}{\sigma_1}, C\right)$$

der Determinante m und Art σ_1 aufgestellt werden, welche D zum ersten Koeffizienten hat.

Die Form ψ ist primitiv. Daß sie keinen ungeraden Teiler hat, folgt daraus, daß m quadratfrei ist. Ihre Koeffizienten können aber auch nicht alle gerade sein. Dies könnte nur eintreten, wenn D gerade und $\sigma_1 = 1$ ist. Auf Grund der Bedeutung von σ_1 ist dann $m-1$ nicht durch 8 und daher, weil m durch f dargestellt wird, auch D nicht durch 8 teilbar. Somit kann nur

$$D \equiv \pm 2 \pmod 8$$

oder

$$D \equiv 4 \pmod 8$$

und demzufolge beziehungsweise

$$m \equiv 1 \mp 2 \qquad m \equiv 5 \pmod 8$$

sein. In beiden Fällen ist

$$D + m \equiv 1 \pmod 8$$

$$D(C-1) = v^2 - m - D \equiv 0 \pmod 8$$

und daher C ungerade.

Die Form ψ hat durchweg positive Charakterwerte. Denn die Determinante m hat entweder nur Charaktere von der Gestalt $\left(\frac{n}{q}\right)$ oder auch noch den Charakter $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, je nachdem $m \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist. Für jeden ungeraden Primfaktor q von m kann D als dargestellte Zahl genommen werden, und die Gleichung $D = b^2 - \sigma^2 mc$ ergibt

$$\left(\frac{D}{q}\right)=\left(\frac{b^2}{q}\right)=1.$$

Der Fall $m\equiv 3 \pmod 4$ kann nur eintreten, wenn D den Charakter $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ nicht besitzt und somit die Gestalt $1+4h$ oder $\pm 2+8h$ hat. Im ersten Falle ist D durch ψ darstellbar und $\frac{D-1}{2}$ gerade. Im zweiten ist C durch ψ darstellbar und nach dem Vorhergehenden

$$D(C-1)\equiv 0 \pmod 8,$$
$$C-1\equiv 0 \pmod 4.$$

Die Stufe der Determinante m ist geringer als die Stufe s von D. Denn es seien ϱ', π' die Anzahlen der Charaktere und Primfaktoren von m. Bei geradem s ist

$$\varrho=\pi=\frac{1}{2}s, \qquad \pi'\leqq\varrho-1$$

und daher

$$\varrho'+\pi'\leqq 2\pi'+1\leqq 2\varrho-1<s.$$

Bei ungeradem s dagegen ist

$$\varrho=\pi+1=\frac{1}{2}(s+1)$$

und D hat den Charakter $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$; es ist daher

$$m\equiv 1 \pmod 4$$

und infolgedessen

$$\varrho'=\pi'\leqq\varrho-1,$$
$$\varrho'+\pi'=2\pi'\leqq 2\varrho-2<s.$$

Die Form ψ ist somit nach der Annahme einem Formenquadrat $\vartheta\vartheta$ äquivalent und man darf den ersten Koeffizienten von ϑ zu D teilerfremd annehmen. Da die Form $\psi\vartheta^{-1}\vartheta^{-1}$ der Hauptform σ_1-ter Art

$$H_1=\left(1, \frac{\sigma_1-1}{\sigma_1}, \frac{(\sigma_1-1)^2-m}{\sigma_1^2}\right)$$

der Determinante m äquivalent ist und ihr erster Koeffizient die Gestalt De^2 hat, so gibt es eine eigentliche Darstellung ξ, η der Zahl De^2 durch H_1. Die Gleichung

$$De^2 = H_1(\xi, \eta) = \left(\xi + \frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1}\eta\right)^2 - \frac{m\eta^2}{\sigma_1^2}$$

ergibt, wenn

$$\sigma_1\xi + (\sigma_1 - 1)\eta - e\sigma_1(\sigma - 1) = \xi_1,$$
$$e\sigma\sigma_1 = \eta_1$$

gesetzt wird,

$$m\eta^2 = (\sigma_1\xi + (\sigma_1 - 1)\eta)^2 - De^2\sigma_1^2 = H(\xi_1, \eta_1).$$

Ist daher ε der größte gemeinschaftliche Teiler von ξ_1, η_1, so hat man eine eigentliche Darstellung der Zahl $m\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2$ durch H und es gibt eine mit H äquivalente Form, deren erster Koeffizient $m\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2$ ist. Da η zu D teilerfremd ist, so ergibt die Zusammensetzung dieser Form mit f eine mit f äquivalente Form $\left(k^2, \frac{b_1}{\sigma}, l\right)$, deren erster Koeffizient ein zu D teilerfremdes Quadrat k^2 ist. Diese Form entsteht durch Duplikation der Form

$$\left(2k, b_1 + k, b_1 + k\cdot\frac{l+1}{2}\right)$$

oder

$$\left(k, \frac{b_1}{\sigma}, kl\right)$$

je nachdem zugleich k gerade und $\sigma = 1$ ist oder nicht.

Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen.

Von Herrn *A. Hurwitz* in Zürich.

§ 1. *Homogene Form der Doppelintegrale.*

Es seien u, v rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene E und

$$J = \iint_G f(u, v)\, du\, dv \tag{1.}$$

ein über das Gebiet G dieser Ebene erstrecktes Doppelintegral. Das Gebiet G werde ganz im Endlichen liegend vorausgesetzt, die Funktion $f(u, v)$ in dem Gebiete G, einschließlich seiner Begrenzung, als eindeutig und stetig. Man nehme nun z als Funktion von u und v im Gebiete G willkürlich an bis auf die Bedingungen, daß z eindeutig, stetig, differentiierbar und beständig von Null verschieden sein soll. Werden dann weiter x und y als Funktionen von u und v durch die Gleichungen

$$u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z} \tag{2.}$$

definiert, so läßt sich das Integral (1.) in folgender Weise umformen. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{d\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x}{z}\right), & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y}{z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x}{z}\right), & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{y}{z}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{z^3} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3.}$$

besitzt den Gleichungen (2.) zufolge den Wert 1. Daher ist

$$(1'.) \qquad J=\iint_G f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^3}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} du\,dv.$$

Nun definiere man die Symbole $dx\,dy, dy\,dz, dz\,dx$ durch die Gleichungen

$$(4.) \quad dx\,dy=\frac{d(x,y)}{d(u,v)}du\,dv,\ dy\,dz=\frac{d(y,z)}{d(u,v)}du\,dv,\ dz\,dx=\frac{d(z,x)}{d(u,v)}du\,dv.$$

Dann läßt sich die Gleichung (1'.) so schreiben:

$$(5.) \qquad J=\iint_G f(x,y,z)\,(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy),$$

wobei

$$(6.) \qquad f(x,y,z)=\frac{1}{z^3}f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$$

eine Form -3. Grades von x, y, z bezeichnet.

Die Gestalt (5.) des Integrales J enthält die bis auf die erwähnten Bedingungen willkürliche Funktion z von u und v. Sie kann als die homogene Gestalt des Doppelintegrales (1.) bezeichnet werden.

§ 2. *Projektive Doppelintegrale.*

Die Betrachtung des vorigen Paragraphen führt naturgemäß zu dem Begriff des projektiven Doppelintegrals, den ich in gegenwärtigem Paragraphen entwickeln will.

Es seien x, y, z homogene Punktkoordinaten in einer Ebene. Jedem Tripel reeller Zahlen x, y, z, die nicht alle drei Null sind, entspricht also ein bestimmter Punkt der Ebene, während umgekehrt einem beliebig angenommenen Punkte der Ebene unendlich viele zu einander proportionale Tripel (x, y, z) als Koordinaten entsprechen. Wenn nun

$$(1.) \qquad l\equiv\alpha x+\beta y+\gamma z$$

eine Linearform, deren Koeffizienten α, β, γ nicht alle drei Null sind, bezeichnet, so kann man für jeden Punkt, der nicht auf der Geraden $l=0$

liegt, die Koordinaten, und zwar auf eine Weise, so wählen, daß sie der Gleichung

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=1$$

genügen. Die so gewählten Koordinaten mögen *„normiert bez. der Linearform l“* genannt und mit x_l, y_l, z_l bezeichnet werden. Bedeuten x, y, z Koordinaten eines Punktes P, der nicht auf der Geraden $l=0$ liegt, so werden die bezüglich l normierten Koordinaten des Punktes P offenbar

$$(2.)\qquad x_l=\frac{x}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\quad y_l=\frac{y}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\quad z_l=\frac{z}{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

sein.

Dies vorausgeschickt, sei F eine Fläche in der betrachteten Ebene. Man nehme drei Linearformen

$$(3.)\quad l\equiv\alpha x+\beta y+\gamma z,\quad l_1\equiv\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z,\quad l_2\equiv\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z$$

willkürlich an bis auf die Bedingungen, daß die Gerade

$$l=0$$

keinen Punkt mit der Fläche F (einschließlich ihrer Begrenzung) gemein haben und daß die Determinante

$$(4.)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein soll.

Sind dann u, v rechtwinklige Koordinaten in einer Hülfsebene E, so wird der Punkt

$$(5.)\qquad u=\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z}{\alpha x+\beta y+\gamma z},\qquad v=\frac{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z}{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

in der Ebene E eine zu der Fläche F kollineare Fläche G beschreiben, wenn der Punkt $x:y:z$ alle Lagen in der Fläche F annimmt. Da der Nenner der Brüche (5.) niemals verschwindet, liegt G ganz im Endlichen.

Für die bezüglich der Linearform l normierten Koordinaten eines Punktes der Fläche F und die Koordinaten u, v des entsprechenden Punktes der Fläche G gelten nun die Gleichungen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1 x_l + \beta_1 y_l + \gamma_1 z_l, \\ v = \alpha_2 x_l + \beta_2 y_l + \gamma_2 z_l, \\ 1 = \alpha\ x_l + \beta\ y_l + \gamma\ z_l, \end{cases}$$

aus denen durch Auflösung nach x_l, y_l, z_l etwa

$$(7.)\qquad \begin{cases} x_l = a_1 u + a_2 v + a \equiv \varphi, \\ y_l = b_1 u + b_2 v + b \equiv \psi, \\ z_l = c_1 u + c_2 v + c \equiv \chi \end{cases}$$

folgt. Hier sollen φ, ψ, χ als Abkürzungen für die rechten Seiten der Gleichungen (7.) dienen.

Es möge jetzt $f(x, y, z)$ eine Form -3. Grades sein, die auf der Fläche F eindeutig und stetig ist. Dann soll das Integral

$$(8.)\qquad J = \int\!\!\int_F f(x, y, z)\,(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

definiert werden durch die Gleichung

$$(9.)\qquad J = \int\!\!\int_G f(x_l, y_l, z_l) \begin{vmatrix} x_l, & y_l, & z_l \\ \frac{\partial x_l}{\partial u}, & \frac{\partial y_l}{\partial u}, & \frac{\partial z_l}{\partial u} \\ \frac{\partial x_l}{\partial v}, & \frac{\partial y_l}{\partial v}, & \frac{\partial z_l}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv,$$

wobei für x_l, y_l, z_l die Ausdrücke φ, ψ, χ resp. nach den Gleichungen (7.) zu substituieren sind.

Die Ausrechnung der hier auftretenden Determinante ergibt

$$\begin{vmatrix} a_1 u + a_2 v + a, & b_1 u + b_2 v + b, & c_1 u + c_2 v + c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta},$$

so daß die Definitionsgleichung (9.) einfacher so:

$$(10.)\qquad J = \frac{1}{\Delta} \int\!\!\int_G f(\varphi, \psi, \chi)\,du\,dv$$

geschrieben werden kann.

Der Wert des auf diese Weise definierten Integrals (8.) ist ein vollständig bestimmter, sobald die Linearformen (2.) fixiert sind. Es soll nun

untersucht werden, in welcher Weise der Wert von J von der Wahl der Linearformen (2.) abhängt.

Man setze an die Stelle der Linearformen (2.) die Formen

$$(11.) \qquad l' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \; l_1' = \alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' z, \; l_2' = \alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2' z.$$

Der diesen Formen entsprechende Wert von J — er heiße J' — entsteht folgendermaßen:

Der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$(12.) \qquad u' = \frac{\alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}, \qquad v' = \frac{\alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2' z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}$$

beschreibe das Gebiet G', wenn der Punkt x, y, z die Fläche F beschreibt.

Bezeichnen x_v, y_v, z_v die bezüglich der Linearform l' normierten Koordinaten, so ist

$$(13.) \qquad \begin{cases} u' = \alpha_1' x_v + \beta_1' y_v + \gamma_1' z_v, \\ v' = \alpha_2' x_v + \beta_2' y_v + \gamma_2' z_v, \\ 1 = \alpha' x_v + \beta' y_v + \gamma' z_v \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(14.) \qquad \begin{cases} x_v = a_1' u' + a_2' v' + a' \equiv \varphi', \\ y_v = b_1' u' + b_2' v' + b' \equiv \psi', \\ z_v = c_1' u' + c_2' v' + c' \equiv \chi'. \end{cases}$$

Der in Rede stehende Wert J' ist dann nach (10.)

$$(15.) \qquad J' = \frac{1}{\Delta'} \iint\limits_{(G')} f(\varphi', \psi', \chi') \, du' \, dv',$$

unter Δ' die Determinante

$$(16.) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha_1', & \beta_1', & \gamma_1' \\ \alpha_2', & \beta_2', & \gamma_2' \end{vmatrix}$$

der Linearformen (11.) verstanden.

Nun läßt sich J' leicht auf das Gebiet G transformieren.

Bezeichnet nämlich (u', v') einen Punkt des Gebietes G', so entspricht ihm ein bestimmter Punkt x, y, z der Fläche F und diesem ein bestimmter Punkt (u, v) des Gebietes G. Und zwar ist nach (12.):

$$(17.) \qquad u' = \frac{\alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z_l}{\alpha' x_l + \beta' y_l + \gamma' z_l}, \qquad v' = \frac{\alpha'_2 x_l + \beta'_2 y_l + \gamma'_2 z_l}{\alpha' x_l + \beta' y_l + \gamma' z_l},$$

während x_l, y_l, z_l mit u und v durch die Formeln (7.) also

$$(18.) \qquad x_l = \varphi, \qquad y_l = \psi, \qquad z_l = \chi,$$

verbunden sind.

Durch diese Gleichungen (17.) und (18.) sind u', v' als Funktionen von u, v dargestellt. Vermöge derselben führt man das Integral J' über in ein Integral mit den Variabeln u, v. Zunächst ergibt sich (vgl. (3.) in § 1)

$$(19.) \qquad \frac{d(u', v')}{d(u, v)} = \frac{1}{(\alpha' x_l + \beta' y_l + \gamma' z_l)^3} \cdot \frac{\Delta'}{\Delta} = \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}\right)^3 \cdot \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Das Vorzeichen dieser Funktionaldeterminante stimmt ersichtlich mit dem Vorzeichen überein, welches

$$(20.) \qquad \frac{\Delta'}{\Delta} \cdot \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}$$

für den Punkt x, y, z der Fläche F besitzt. Dieses Vorzeichen ist für alle Punkte der Fläche F dasselbe, weil die beiden Linearformen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$

innerhalb F stets von Null verschieden bleiben. Nach (14.) ist nun ferner

$$\varphi' = x_v = \frac{x}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z} = \frac{x_l}{\alpha' x_l + \beta' y_l + \gamma' z_l} = \varphi \cdot \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z},$$

$$\psi' = y_v = \psi \cdot \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z},$$

$$\chi' = z_v = \chi \cdot \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}.$$

Berücksichtigt man, daß $f(x, y, z)$ homogen vom Grade -3 ist, so erkennt man, daß vermöge der Substitutionen (17.), (18.) das Integral J' übergeht in

$$J' = \varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta} \int\int_G f(\varphi, \psi, \chi)\, du\, dv = \varepsilon \cdot J,$$

unter ε das Vorzeichen des Ausdruckes (20.) in der Fläche F verstanden. Man gelangt demnach zu folgendem Ergebnis:

Berechnet man den Wert des Integrals

$$(8.) \qquad J = \int\int_{(F)} f(x, y, z)\,(x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$$

einerseits unter Benutzung der drei Linearformen (3.)

$$l,\ l_1,\ l_2,$$

andererseits unter Benutzung dreier anderer Linearformen (11.)

$$l',\ l'_1,\ l'_2,$$

so sind die beiden berechneten Werte einander direkt oder entgegengesetzt gleich, je nachdem

$$\frac{\Delta'}{\Delta}\cdot\frac{l}{l'}$$

in der Fläche F beständig das positive oder beständig das negative Zeichen besitzt. Dabei bedeuten Δ und Δ' die Determinanten der Formen l, l_1, l_2 bez. l', l'_1, l'_2.

Der absolute Wert von J ist demnach nur abhängig von der Form $f(x, y, z)$ und der Fläche F. Da aber immerhin das Vorzeichen von J von der Wahl der Linearformen abhängt, so ist es für manche Betrachtungen wünschenswert, die Linearformen mit in die Bezeichnung von J aufzunehmen und etwa mit

$$(21.)\qquad J=\iint\limits_{(F)l,l_1,l_2} f(x,y,z)\,(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$$

denjenigen Wert des Integrals anzudeuten, welcher bei Benutzung der Linearformen l, l_1, l_2 entsteht.

Die zur Berechnung des Integrals (21.) dienenden Formeln stelle ich hier nochmals zusammen:

Durch die Gleichungen (vgl. (5.))

$$(22.)\qquad u=\frac{l_1}{l},\qquad v=\frac{l_2}{l}$$

wird die Fläche F auf die Fläche G der u-v-Ebene transformiert.

Ersetzt man dann im Integranden von J

$$x,\ y,\ z$$

durch diejenigen linearen Funktionen von u und v, die sich durch Auflösung der Gleichungen

$$(23.)\qquad \begin{cases} u=l_1=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z, \\ v=l_2=\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z, \\ 1=l=\alpha x+\beta y+\gamma z \end{cases}$$

ergeben, so entsteht das auf die u-v-Ebene bezügliche Integral

$$(24.)\quad \int\int_G f(x,y,z)\left[x\frac{d(y,z)}{d(u,v)}+y\frac{d(z,x)}{d(u,v)}+z\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right] = \frac{1}{\Delta}\int\int_G f(x,y,z)\,du\,dv,$$

welches nun den Wert des Integrals (21.) vorstellt.

Die Theorie der projektiven Doppelintegrale läßt sich leicht noch weiter entwickeln, auch auf den Fall von mehrfachen Integralen erweitern. Doch unterlasse ich das hier, da es für den speziellen hier verfolgten Zweck nicht notwendig ist. Zur Abkürzung werde in der Folge

$$(25.)\qquad x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=d\Delta$$

gesetzt, so daß

$$J=\int\int_{(F)} f(x,y,z)\,d\Delta$$

die allgemeine Gestalt des projektiven Integrals wird.*)

§ 3. *Berechnung einiger projektiven Doppelintegrale.*

Es möge nun das spezielle Doppelintegral

$$(1.)\qquad J=\int\int_F \frac{d\Delta}{(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}$$

berechnet werden, wobei

$$(2.)\qquad l\equiv\alpha x+\beta y+\gamma z$$

eine beliebige Linearform bezeichnet, die jedoch für keinen Punkt der Fläche F verschwindet.

Die Linearformen

$$(3.)\qquad l_1\equiv\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z,\qquad l_2\equiv\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z$$

mögen so gewählt werden, daß

$$(4.)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha,&\beta,&\gamma\\ \alpha_1,&\beta_1,&\gamma_1\\ \alpha_2,&\beta_2,&\gamma_2\end{vmatrix}=1$$

---

*) Für ein algebraisches Gebilde von beliebig vielen Dimensionen hat Herr *Nöther* die zugehörigen vielfachen Integrale in homogener Gestalt aufgestellt in seiner Abhandlung „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen“, Mathematische Annalen, Bd. 2, S. 303.

ist. Setzt man nun

$$(5.) \qquad u=\frac{l_1}{l}, \qquad v=\frac{l_2}{l},$$

so geht die Fläche F in eine ihr kollineare Fläche G der u-v-Ebene über und es kommt nach (24.) des vorigen Paragraphen

$$(6.) \qquad J=\int\int_G du\,dv$$

als derjenige Wert des Integrals J, welcher den Linearformen l, l_1, l_2 entspricht. Dieser Wert ist also nichts anderes als der Flächeninhalt von G. Das Integral J stellt daher die projektive Verallgemeinerung des Flächeninhalts vor und kann passend als „*Flächeninhalt von F bezüglich der Linearform* $l\equiv\alpha x+\beta y+\gamma z$“ bezeichnet werden.

Sind speziell x, y, z homogene rechtwinklige Koordinaten (sodaß $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ die rechtwinkligen Koordinaten des einzelnen Punktes der Fläche F sind) und nimmt man die Linearform $l\equiv z$, so wird der Wert von J identisch mit dem Flächeninhalt von F, wie man erkennt, wenn man in diesem Falle $l_1\equiv x$, $l_2\equiv y$ wählt.

Das Integral (1.) möge nun insbesondere für den Fall ins Auge gefaßt werden, wo F die Fläche des Kegelschnitts

$$(7.) \quad F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}yz+2a_{23}zx=0$$

ist. Die Linearformen (3.) wählt man dann am zweckmäßigsten so, daß identisch

$$(8.) \qquad F(x, y, z)\equiv\varrho(-l_1^2-l_2^2+\varkappa l^2)$$

wird, wo $\varrho, \varkappa$ Konstante bezeichnen.

Nach (5.) wird jetzt G die Fläche des Kreises

$$u^2+v^2=\varkappa,$$

und der Wert des Integrals J ist demnach

$$(9.) \qquad J=\varkappa\cdot\pi.$$

Es erübrigt, den Wert von $\varkappa$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke differentiiere man (8.) nach x, y, z. Dadurch ergibt sich

$$(10.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} \equiv \varrho(-\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 + \varkappa \alpha l), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \varrho(-\beta_1 l_1 - \beta_2 l_2 + \varkappa \beta l), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} \equiv \varrho(-\gamma_1 l_1 - \gamma_2 l_2 + \varkappa \gamma l). \end{cases}$$

Nimmt man die Determinanten der links und rechts auftretenden Linearformen von x, y, z, so findet man

$$(11.)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \varkappa \varrho^3.$$

Ferner hat man für dasjenige Wertsystem x, y, z, welches die Gleichungen

$$l_1 = 0, \qquad l_2 = 0, \qquad l = 1$$

befriedigt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} &= \varrho \varkappa \alpha, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} &= \varrho \varkappa \beta, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} &= \varrho \varkappa \gamma, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= 1 \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von x, y, z

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \varrho \varkappa \alpha \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \varrho \varkappa \beta \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \varrho \varkappa \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(12.)\qquad D - \varrho \varkappa \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

wo

$$(13.)\qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \alpha \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \beta \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & 0 \end{vmatrix}$$

die adjungierte Form von $F(x, y, z)$ bezeichnet.

Aus (11.) und (12.) ergibt sich

$$\varrho^2 = \Phi(\alpha, \beta, \gamma), \qquad z = \frac{\pm D}{\sqrt{\Phi^3(\alpha, \beta, \gamma)}}. \tag{14.}$$

Somit ist der Flächeninhalt des Kegelschnittes (7.) *bezüglich der Linearform* $\alpha x + \beta y + \gamma z$ *gleich dem absoluten Werte von*

$$\frac{D \cdot \pi}{(\sqrt{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)})^3}. \tag{15.}$$

Insbesondere ergibt sich für den Kegelschnitt

$$F(x, y, z) \equiv xz - y^2 = 0, \tag{16.}$$

$$D = \frac{1}{4}, \qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4}(4\alpha\gamma - \beta^2)$$

und also

$$\frac{2\pi}{(\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2})^3} \tag{17.}$$

als Wert seines Flächeninhalts bezüglich der Linearform $\alpha x + \beta y + \gamma z$.

Es werde nun das Integral

$$\iint \frac{dA}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3} \tag{18.}$$

für die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$P_0(x_0, y_0, z_0), \quad P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2) \tag{19.}$$

berechnet, also der Flächeninhalt des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ bezüglich der Linearform $\alpha x + \beta y + \gamma z$. Der Berechnung mögen die Linearformen

$$l = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad l_1 = \begin{vmatrix} x_0, y_0, z_0 \\ x_1, y_1, z_1 \\ x, y, z \end{vmatrix}, \quad l_2 = \begin{vmatrix} x_0, y_0, z_0 \\ x, y, z \\ x_2, y_2, z_2 \end{vmatrix} \tag{20.}$$

zugrunde gelegt werden. Die Gleichungen

$$u = \frac{l_1}{l}, \qquad v = \frac{l_2}{l}$$

lassen erkennen, daß das Gebiet G das Dreieck mit den Ecken

$$u = 0, \qquad v = 0$$

$$u = 0, \qquad v = \frac{H}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1}$$

$$u = \frac{H}{\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2}, \qquad v = 0$$

ist, wobei zur Abkürzung

$$(21.) \qquad H = \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Die Fläche von G ist

$$\frac{1}{2} \frac{H^2}{(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)},$$

und nach (24.) des vorigen Paragraphen ist daher der Wert des Integrals (18.)

$$\frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{H^2}{(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)},$$

unter Δ die Determinante der Linearformen (20.) verstanden.

Für Δ ergibt sich aber durch eine leichte Rechnung

$$\Delta = H(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0).$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ bezüglich der Linearform $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ist daher der absolute Betrag von

$$(22.) \qquad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)}.$$

§ 4. *Darstellung der Klassenzahl durch eine unendliche Summe.*

Sind r, s zwei ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1, so möge denselben der Punkt

$$(1.) \qquad x = r^2, \qquad y = rs, \qquad z = s^2$$

des Kegelschnittes

$$(2.) \qquad xz - y^2 = 0$$

zugeordnet werden. Zwei verschiedenen Zahlenpaaren (r, s) und (r', s') ist offenbar dann und nur dann derselbe Punkt zugeordnet, wenn

$$r' = -r, \qquad s' = -s$$

ist. Zur Abkürzung werde der Punkt (1.) als der „Punkt (r, s)“ bezeichnet.

Die Verbindungssehne zweier Punkte

$$(r, s), \qquad (r_1, s_1)$$

heiße „Elementarsehne“, wenn

$$rs_1 - sr_1 = \pm 1$$

ist.*) Ein dem Kegelschnitt (2.) eingeschriebenes Dreieck heiße „Elementardreieck“, wenn seine Seiten Elementarsehnen sind.

Die sämtlichen Elementardreiecke entstehen auf folgende Weise: Man ordne jeder Lösung der Gleichung

(3.) $$rs_1 - sr_1 = 1$$

die Punkte

(4.) $$(r, s), \qquad (r_1, s_1), \qquad (r + r_1, s + s_1)$$

zu, dann bilden die letzteren die Ecken eines Elementardreiecks. Jedes Elementardreieck wird auf diese Weise sechsmal erhalten. Nämlich zwei Lösungen

$$(r, s, r_1, s_1) \quad \text{und} \quad (r', s', r_1', s_1')$$

der Gleichung (3.) entspricht dasselbe Elementardreieck stets und nur dann, wenn einer der folgenden sechs Fälle stattfindet:

$$\left.\begin{aligned} r' &= r \\ s' &= s \\ r_1' &= r_1 \\ s_1' &= s_1 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} r' &= -r \\ s' &= -s \\ r_1' &= -r_1 \\ s_1' &= -s_1 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} r' &= r_1 \\ s' &= s_1 \\ r_1' &= -(r + r_1) \\ s_1' &= -(s + s_1) \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} r' &= -r_1 \\ s' &= -s_1 \\ r_1' &= r + r_1 \\ s_1' &= s + s_1 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} r' &= r + r_1 \\ s' &= s + s_1 \\ r_1' &= -r \\ s_1' &= -s \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} r' &= -r - r_1 \\ s' &= -s - s_1 \\ r_1' &= r \\ s_1' &= s \end{aligned}\right| .$$

Die Lösungen der Gleichung (3.) gruppieren sich also zu je sechs solchen

$$(\pm r, \pm s, \pm r_1, \pm s_1), \quad (\pm r_1, \pm s_1, \mp(r + r_1), \mp(s + s_1)),$$
$$(\pm(r + r_1), \pm(s + s_1), \mp r, \mp s),$$

denen dasselbe Elementardreieck (4.) entspricht.

Der Flächeninhalt des Elementardreiecks (4.) bezüglich der Linearform

(5.) $$l = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

*) Vgl. *A. Hurwitz*, Über die Reduktion der binären quadratischen Formen. Mathematische Annalen, Bd. 45.

welche beliebig gewählt werde, bis auf die Bedingung, daß

$$(6.) \qquad 4\alpha\gamma-\beta^2>0, \qquad \alpha>0, \qquad \gamma>0$$

sein soll, ist nach (22.) des vorigen Paragraphen

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r^2, & rs, & s^2 \\ r_1^2, & r_1s_1, & s_1^2 \\ (r+r_1)^2, & (r+r_1)(s+s_1), & (s+s_1)^2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(\alpha r^2+\beta rs+\gamma s^2)(\alpha r_1^2+\beta r_1s_1+\gamma s_1^2)[\alpha(r+r_1)^2+\beta(r+r_1)(s+s_1)+\gamma(s+s_1)^2]}$$

oder wegen (3.)

$$(7.) \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\alpha r^2+\beta rs+\gamma s^2)(\alpha r_1^2+\beta r_1s_1+\gamma s_1^2)[\alpha(r+r_1)^2+\beta(r+r_1)(s+s_1)+\gamma(s+s_1)^2]}.$$

Die Elementardreiecke füllen nun in ihrer Gesamtheit den Kegelschnitt (2.) einfach und lückenlos aus.*)

Summiert man daher die den sämtlichen Lösungen der Gleichung (3.) entsprechenden Ausdrücke (7.), so erhält man das Sechsfache des Flächeninhalts des Kegelschnittes (2.) bezüglich der Linearform (5.). Nach (17.) des vorigen Paragraphen gilt also die Gleichung

$$(8.) \qquad \begin{cases} \Sigma\dfrac{1}{(\alpha r^2+\beta rs+\gamma s^2)(\alpha r_1^2+\beta r_1s_1+\gamma s_1^2)[\alpha(r+r_1)^2+\beta(r+r_1)(s+s_1)+\gamma(s+s_1)^2]} \\ =\dfrac{24\pi}{(\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2})^3}, \end{cases}$$

wobei die Summe über die sämtlichen Lösungen der Gleichung (3.) zu erstrecken ist.

Die vorstehende Gleichung läßt sich nun noch in anderer Weise auffassen. Bezeichnet

$$(9.) \qquad au^2+2buv+cv^2$$

eine positive binäre quadratische Form, so wird

$$a(ru+r_1v)^2+2b(ru+r_1v)(su+s_1v)+c(su+s_1v)^2$$
$$=(ar^2+2brs+cs^2)u^2+2(arr_1+b(rs_1+sr_1)+css_1)uv+(ar_1^2+2br_1s_1+cs_1^2)v^2$$
$$=a'u^2+2b'uv+c'v^2,$$

wo a', b', c' zur Abkürzung stehen.

*) a. a. O. S. 88.

Setzt man daher in (8.)

$$\alpha = a, \qquad \beta = 2b, \qquad \gamma = c$$

und

$$D = ac - b^2, \tag{10.}$$

so kommt

$$\Sigma \frac{1}{a'c'(a'+2b'+c')} = \frac{3\pi}{D\sqrt{D}}. \tag{11.}$$

Die Summation ist über alle Formen (a', b', c') zu erstrecken, die aus der Form (9.) durch alle möglichen linearen Substitutionen der Determinante 1 hervorgehen. Diese Formen bilden eine Klasse von positiven quadratischen Formen der Determinante D und zwar tritt jede Form der Klasse genau $2k$-mal auf, wenn $2k$ angibt, wie viele Transformationen in sich die Form (9.), oder auch irgendeine andere in der Klasse enthaltene Form, besitzt*).

Die Gleichung (11.) enthält also folgenden Satz:

Durchläuft (a, b, c) die sämtlichen Formen einer Klasse positiver quadratischer Formen der Determinante D, so ist

$$\frac{3\pi}{2D\sqrt{D}} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{a,b,c} \frac{1}{ac(a+2b+c)}. \tag{12.}$$

Dabei ist

$k = 2$, *wenn in der Klasse eine Form der Gestalt* $(a, 0, a)$,

$k = 3$, *wenn in der Klasse eine Form der Gestalt* $\left(a, \frac{1}{2}a, a\right)$

vorkommt, und

$k = 1$ *in allen übrigen Fällen.*

Man denke sich nun die ganzzahligen positiven quadratischen Formen

$$au^2 + 2buv + cv^2$$

der Determinante

$$ac - b^2 = D$$

in Klassen verteilt, für jede Klasse die Gleichung (12.) aufgestellt und schließlich alle entstandenen Gleichungen addiert.

Auf diese Weise ergibt sich der Satz:

---

*) Wegen der Bestimmung von $2k$ vgl. *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen über Zahlentheorie (Braunschweig 1894) § 62.

Bezeichnet h die Anzahl der Klassen, in welche die ganzzahligen positiven binären quadratischen Formen (a, b, c) der Determinante D zerfallen, so ist

$$(13.) \qquad \frac{3\pi}{2D\sqrt{D}} \cdot h = \sum_{a,b,c} \frac{1}{ac(a+2b+c)},$$

die Summe über die sämtlichen Formen (a, b, c) genommen.

Hierbei ist unter „Anzahl h der Klassen“ die über die verschiedenen Klassen ausgedehnte Summe

$$h = \Sigma \frac{1}{k}$$

zu verstehen. D. h. es sind die Klassen in der Weise zu zählen, daß im allgemeinen jede Klasse einmal, indessen jede Klasse, welche eine Form der Gestalt $(a, 0, a)$ enthält, nur $^1/_2$ mal und jede Klasse, welche eine Form der Gestalt $(2a, a, 2a)$ enthält, nur $^1/_3$ mal gerechnet wird. Schreibt man n an die Stelle von b, sowie r und s an die Stelle von a und c, so werden für einen bestimmten Wert von n die Zahlen r und s alle positiven ganzzahligen Werte annehmen müssen, die der Gleichung

$$rs = n^2 + D$$

genügen. Wenn man daher je zwei Glieder der Summe (13.), die entgegengesetzten Werten von n entsprechen, zusammenfaßt, so nimmt die Gleichung (13.) die Gestalt an:

$$(14.) \quad h = \frac{2D\sqrt{D}}{3\pi}\left[\frac{1}{D}\sum_{rs=D}\frac{1}{r+s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+D}\sum_{rs=n^2+D}\left(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\right)\right].$$

§ 5. *Weitere Reihendarstellungen der Klassenzahl.*

Die vorstehende Darstellung der Klassenzahl hat den Nachteil, daß die darin auftretende Reihe sehr langsam konvergiert. Reihen von besserer Konvergenz erhält man, indem man den befolgten Gedankengang verallgemeinert, was nunmehr geschehen soll. Es sei wie oben

$$(1.) \quad F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes. Die Determinante

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

werde positiv vorausgesetzt, was zulässig ist, da man widrigenfalls $-F(x, y, z)$ an die Stelle von $F(x, y, z)$ setzen könnte. Im Innern des Kegelschnittes ist dann $F(x, y, z) > 0$.

Die Linearform

$$l \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z \tag{3.}$$

werde so gewählt, daß die Gerade $l = 0$ keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein hat.

Man betrachte nun das Integral

$$J_\mu = \iint\limits_{(F)} \frac{[F(x, y, z)]^\mu}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^{2\mu+3}} dA, \tag{4.}$$

wo μ eine zunächst beliebig gedachte reelle Größe bezeichnet und die Integrationsfläche F dem Innern des in Rede stehenden Kegelschnittes angehört.*)

Bei der Berechnung des Integrales mögen dieselben Linearformen l, l_1, l_2 verwendet werden, die im § 3 bei der Berechnung des Flächeninhalts des Kegelschnittes bezüglich der Linearform l gebraucht wurden. Vermöge der Kollineation

$$u = \frac{l_1}{l}, \qquad v = \frac{l_2}{l} \tag{5.}$$

geht die Fläche F über in ein Gebiet G, welches der Kreisfläche

$$u^2 + v^2 = \varkappa$$

angehört. Der Gleichung (8.) in § 3 zufolge kommt nun

$$J_\mu = \varrho^\mu \iint\limits_G (\varkappa - u^2 - v^2)^\mu \, du \, dv. \tag{6.}$$

Dabei ist nach (14.) in § 3

$$\varrho = \sqrt{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)}, \qquad \varkappa = \frac{D}{\sqrt{\Phi^3(\alpha, \beta, \gamma)}}, \tag{7.}$$

und die Quadratwurzeln sind positiv zu nehmen, da wegen $D > 0$, $\varkappa > 0$ nach (11.) in § 3 auch $\varrho > 0$ ist.

Fällt nun die Integrationsfläche F mit der Fläche des Kegelschnittes (1.) zusammen, so ist das Integral (6.) über die Fläche des Kreises $u^2 + v^2 = \varkappa$

---

*) Für $\mu = -\frac{3}{2}$ stellt das Integral J_μ, beiläufig bemerkt, den *Cayley*schen Flächeninhalt von F, bezogen auf $F(x, y, z = 0)$ als Fundamentalkegelschnitt, vor.

zu erstrecken. Durch Übergang zu Polarkoordinaten findet man nunmehr leicht:

Der Wert des Integrales J_μ für die Fläche des Kegelschnittes (1.) *ist*

$$(8.) \qquad \pi \varrho^\mu \frac{\varkappa^{\mu+1}}{(\mu+1)} = \pi \frac{D^{\mu+1}}{(\mu+1)} \cdot \frac{1}{\Phi^\mu(\alpha,\beta,\gamma)\sqrt{\Phi^3(\alpha,\beta,\gamma)}}.$$

Hierbei muß jedoch $\mu > -1$ vorausgesetzt werden, widrigenfalls das betrachtete Integral nicht endlich sein würde.

Im Falle $\mu = 0$ geht (7.), wie es sein muß, in (15.) § 3 über.

Es werde nun weiter der Wert des Integrals J_μ ins Auge gefaßt für den Fall, wo die Integrationsfläche F die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$(9.) \qquad P_0(x_0, y_0, z_0), \quad P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

st. Hier gelangt man zu einem verhältnismäßig einfachen Ergebnis, wenn wie jetzt vorausgesetzt werden soll, μ eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Das Gebiet G, über welches jetzt das Integral (6.) zu erstrecken ist, ist das Dreieck mit den Ecken

$$(10.) \qquad Q_0(u_0, v_0), \quad Q_1(u_1, v_1), \quad Q_2(u_2, v_2),$$

wobei u_i, v_i nach den Gleichungen (5.) aus den Koordinaten x_i, y_i, z_i des Punktes P_i zu berechnen sind.

Es sei nun

$$H(u, v)$$

eine ganze rationale Funktion von u und v, dann geht das über das Dreieck $Q_0 Q_1 Q_2$ erstreckte Integral

$$(11.) \qquad H = \iint H(u, v)\, du\, dv$$

durch die Substitution

$$(12.) \qquad \begin{cases} u = u_0 + t_1(u_1 - u_0) + t_2(u_2 - u_0), \\ v = v_0 + t_1(v_1 - v_0) + t_2(v_2 - v_0) \end{cases}$$

über in

$$(13.) \qquad H = \pm \begin{vmatrix} u_0, & v_0, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} \iint H(t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2, t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2)\, dt_1\, dt_2,$$

wo zur Abkürzung

$$t_0 = 1 - t_1 - t_2 \tag{14.}$$

gesetzt ist und das Integrationsgebiet für die neuen Variabeln t_1, t_2 durch das Dreieck mit den Ecken

$$(t_1 = 0, t_2 = 0), \qquad (t_1 = 1, t_2 = 0), \qquad (t_1 = 0, t_2 = 1)$$

gebildet wird. Nun ist ferner das über dieses Dreieck erstreckte Integral

$$\iint t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2}\, dt_1\, dt_2 = \int_0^1 t_1^{l_1}\, dt_1 \int_0^{1-t_1} (1 - t_1 - t_2)^{l_0} t_2^{l_2}\, dt_2$$

$$= \int_0^1 t_1^{l_1} (1 - t_1)^{l_0 + l_2 + 1}\, dt_1 \int_0^1 t^{l_2} (1 - t)^{l_0}\, dt,$$

wie man durch die Substitution $t_2 = (1 - t_1)t$ erkennt.

Es wird daher

$$\iint t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2}\, dt_1\, dt_2 = \frac{\Gamma(l_0 + 1)\,\Gamma(l_1 + 1)\,\Gamma(l_2 + 1)}{\Gamma(l_0 + l_1 + l_2 + 3)} = \frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0 + l_1 + l_2 + 2)!}. \tag{15.}$$

Entwickelt man den Integranden in (13.) nach Potenzen von t_0, t_1, t_2, so kann man auf die einzelnen Glieder der Entwicklung die Formel (15.) anwenden. Auf diese Weise erhält man zunächst den Satz:

Der Wert des über das Dreieck mit den Ecken

$$(u_0, v_0), \qquad (u_1, v_1), \qquad (u_2, v_2)$$

erstreckten Integrals

$$\iint H(u, v)\, du\, dv$$

entsteht, wenn man

$$\pm \begin{vmatrix} u_0, & v_0, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix} \cdot H(t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2,\ t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2) \tag{16.}$$

nach Potenzen von t_0, t_1, t_2 entwickelt und in jedem einzelnen Gliede dieser Entwicklung das Potenzprodukt

$$t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2} \qquad \textit{durch} \qquad \frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0 + l_1 + l_2 + 2)!} \tag{17.}$$

ersetzt.

Das Vorzeichen in (16.) ist so zu wählen, daß $\pm \begin{vmatrix} u_0, & v_0, & 1 \\ u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \end{vmatrix}$ positiv ausfällt.

Hier kann man noch bemerken, daß der Funktion

$$H(t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2,\ t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2)$$

beliebige durch

$$1 - t_0 - t_1 - t_2$$

teilbare Glieder hinzugesetzt werden dürfen. Denn macht man in

$$(1 - t_0 - t_1 - t_2)\, t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2} = t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2} - t_0^{l_0+1} t_1^{l_1} t_2^{l_2} - t_0^{l_0} t_1^{l_1+1} t_2^{l_2} - t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2+1}$$

die durch (17.) vorgeschriebenen Ersetzungen, so erhält man identisch Null, wie man durch direkte Rechnung leicht bestätigt, wie aber auch daraus hervorgeht, daß das Integral

$$\iint (1 - t_0 - t_1 - t_2)\, t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2}\, dt_1\, dt_2$$

für $t_0 = 1 - t_1 - t_2$ verschwindet.

Für das Integral (6.) tritt an die Stelle von $H(u, v)$ die μ-te Potenz von

$$\varrho(\varkappa - u^2 - v^2)$$

und die Berechnung dieses Integrals erfordert daher die Entwicklung der μ-ten Potenz von

$$\overline{K} = \varrho(\varkappa - (t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2)^2 - (t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2)^2),$$

an dessen Stelle aber auch die μ-te Potenz von

$$(17.)\quad K = \varrho(\varkappa (t_0 + t_1 + t_2)^2 - (t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2)^2 - (t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2)^2)$$

gesetzt werden darf, weil dadurch nur Glieder hinzugenommen werden, die durch $1 - t_0 - t_1 - t_2$ teilbar sind, denn es ist

$$\overline{K} = K + \varrho\varkappa(1 - (t_0 + t_1 + t_2)^2).$$

Zur Umformung von K bestimme man x, y, z aus den Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} l \equiv \alpha\ x + \beta\ y + \gamma\ z = t_0 \quad + t_1 \quad + t_2, \\ l_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2, \\ l_2 \equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2. \end{cases}$$

Nach (8.) in § 3 wird dann

$$K = F(x, y, z). \tag{19.}$$

Die Werte von x, y, z ergeben sich folgendermaßen.

Zur Abkürzung sei

$$l^{(0)} = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0,\ l^{(1)} = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1,\ l^{(2)} = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2. \tag{20.}$$

Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{l^{(0)}}(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0),\ u_1 = \frac{1}{l^{(1)}}(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1), \\ u_2 &= \frac{1}{l^{(2)}}(\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2), \\ v_0 &= \frac{1}{l^{(0)}}(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0),\ v_1 = \frac{1}{l^{(1)}}(\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1), \\ v_2 &= \frac{1}{l^{(2)}}(\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 z_2). \end{aligned}\right. \tag{21.}$$

Daher sind die Auflösungen von (18.) diese:

$$\left\{\begin{aligned} x &= t_0 \frac{x_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{x_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{x_2}{l^{(2)}},\ y = t_0 \frac{y_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{y_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{y_2}{l^{(2)}}, \\ z &= t_0 \frac{z_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{z_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{z_2}{l^{(2)}}. \end{aligned}\right. \tag{22.}$$

Der Determinantenfaktor in (16.) drückt sich mit Hülfe von (21.) in der Form aus:

$$\pm \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{l^{(0)}\, l^{(1)}\, l^{(2)}}. \tag{23.}$$

Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtung läßt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Das Integral J_μ, erstreckt über die Fläche des Dreiecks mit den Ecken

$$(x_0, y_0, z_0), \qquad (x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2),$$

setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Der eine Faktor ist der absolute Wert des Ausdrucks (23.), *wobei die Bedeutung von $l^{(0)}, l^{(1)}, l^{(2)}$ aus* (20.) *erhellt. Um den zweiten Faktor zu erhalten, mache man in der μ-ten Potenz von*

$$F(x, y, z)$$

die Substitution (22.), *entwickele sodann nach Potenzen von* t_0, t_1, t_2 *und ersetze schließlich in dieser Entwicklung das einzelne Potenzprodukt* $t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2}$ *durch*

$$\frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0+l_1+l_2+2)!}.$$

Im Falle $\mu=0$ kommt man auf den Wert (22.) in § 3 zurück, der dort auf anderem Wege gefunden wurde.

Die erhaltenen Resultate mögen nun auf den Fall des Kegelschnittes

$$F(x, y, z)\equiv xz-y^2=0 \tag{24.}$$

spezialisiert werden, für welchen

$$D=\frac{1}{4}, \quad \Phi(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{1}{4}(4\alpha\gamma-\beta^2) \tag{25.}$$

ist.

Der Wert des Integrals J_μ für die Fläche dieses Kegelschnittes wird nach (8.)

$$\frac{2\pi}{(\mu+1)}\cdot\frac{1}{(4\alpha\gamma-\beta^2)^{\mu+1}\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}. \tag{26.}$$

Für das Integral J_μ erstreckt über die Fläche eines Dreiecks bleibt der Faktor (23.) unverändert. Dagegen spezialisiert sich der Ausdruck, dessen μ-te Potenz nach Potenzen von t_0, t_1, t_2 zu entwickeln ist, wie folgt:

$$\left\{\begin{aligned} K=&\frac{t_0^2}{l^{(0)2}}(x_0z_0-y_0^2)+\frac{t_1^2}{l^{(1)2}}(x_1z_1-y_1^2)+\frac{t_2^2}{l^{(2)2}}(x_2z_2-y_2^2)\\ &+\frac{t_1t_2}{l^{(1)}l^{(2)}}(x_1z_2+x_2z_1-2y_1y_2)+\frac{t_2t_0}{l^{(2)}l^{(0)}}(x_2z_0+x_0z_2-2y_2y_0)\\ &+\frac{t_0t_1}{l^{(0)}l^{(1)}}(x_0z_1+x_1z_0-2y_0y_1). \end{aligned}\right. \tag{27.}$$

Ist das in Betracht kommende Dreieck dem Kegelschnitt (24.) einbeschrieben, so wird einfacher:

$$\left\{\begin{aligned} K=&\frac{t_1t_2}{l^{(1)}l^{(2)}}(x_1z_2+x_2z_1-2y_1y_2)+\frac{t_2t_0}{l^{(2)}l^{(0)}}(x_2z_0+x_0z_2-2y_2y_0)\\ &+\frac{t_0t_1}{l^{(0)}l^{(1)}}(x_0z_1+x_1z_0-2y_0y_1). \end{aligned}\right. \tag{27'.}$$

Fällt das Dreieck mit dem Elementardreieck (4.) des § 4 zusammen, so besitzt der Faktor (23.) den in § 4 unter (7.) angegebenen Wert, wobei

jedoch der Faktor $\frac{1}{2}$ daselbst zu unterdrücken ist. Zugleich findet sich für K aus (27′.) (da $x_0 = r^2$, $y_0 = rs$, $z_0 = s^2$; $x_1 = r_1^2$, $y_1 = r_1 s_1$, $z_1 = s_1^2$; $x_2 = (r + r_1)^2$, $y_2 = (r + r_1)(s + s_1)$, $z_2 = (s + s_1)^2$)

$$(27''.) \qquad K = \frac{t_1 t_2}{l^{(1)} l^{(2)}} + \frac{t_2 t_0}{l^{(2)} l^{(0)}} + \frac{t_0 t_1}{l^{(0)} l^{(1)}}.$$

Der Wert des Integrals J_μ erstreckt über die Fläche des Elementardreiecks

$$(28.) \qquad (r, s), \quad (r_1, s_1), \quad (r + r_1, s + s_1)$$

läßt sich demnach in übersichtlicher Weise folgendermaßen darstellen.

Wenn $G(t_0, t_1, t_2)$ eine ganze rationale Funktion von t_0, t_1, t_2 bezeichnet, so verstehe man unter

$$(29.) \qquad [G(t_0, t_1, t_2)]$$

denjenigen Wert, welcher entsteht, falls man jedes Potenzprodukt

$$t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2}$$

durch

$$\frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0 + l_1 + l_2 + 2)!}$$

ersetzt.

Der in Rede stehende Wert des Integrals J_μ ist dann

$$(30.) \qquad \frac{1}{l^{(0)} l^{(1)} l^{(2)}} \left[\left(\frac{t_0 t_1}{l^{(0)} l^{(1)}} + \frac{t_1 t_2}{l^{(1)} l^{(2)}} + \frac{t_2 t_0}{l^{(2)} l^{(0)}} \right)^\mu \right],$$

wobei

$$(31.) \qquad \begin{cases} l^{(0)} = \alpha r^2 + \beta r s + \gamma s^2, \quad l^{(1)} = \alpha r_1^2 + \beta r_1 s_1 + \gamma s_1^2, \\ \qquad\qquad l^{(2)} = \alpha (r + r_1)^2 + \beta (r + r_1)(s + s_1) + \gamma (s + s_1)^2. \end{cases}$$

Da nun der Kegelschnitt (24.) durch die Elementardreiecke einfach und lückenlos ausgefüllt wird, so ist das über den Kegelschnitt erstreckte Integral J_μ gleich der Summe der über die Elementardreiecke erstreckten Integrale J_μ. Berücksichtigt man noch, daß je sechs Lösungen der Gleichung

$$(32.) \qquad r s_1 - s r_1 = 1$$

ein und dasselbe Elementardreieck (28.) entspricht, so erhält man nun die Gleichung

$$(33.) \qquad \frac{12\pi}{(\mu + 1)(4\alpha\gamma - \beta^2)^{\mu+1} \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} = \Sigma \frac{1}{l^{(0)} l^{(1)} l^{(2)}} \left[\left(\frac{t_0 t_1}{l^{(0)} l^{(1)}} + \frac{t_1 t_2}{l^{(1)} l^{(2)}} + \frac{t_2 t_0}{l^{(2)} l^{(0)}} \right)^\mu \right],$$

wobei die Summe über alle Lösungen der Gleichung (32.) zu erstrecken ist. Indem man hier genau so verfährt, wie es in § 4 bei der Gleichung (8.) geschah, entsteht der folgende Satz:

Durchläuft (A, B, C) *die sämtlichen Formen einer Klasse positiver quadratischer Formen der Determinante*

$$AC - B^2 = D,$$

so ist

$$(34.) \qquad \frac{3\pi}{k(\mu+1)(4D)^{\mu+1}\sqrt{D}} = \Sigma \frac{1}{abc}\left[\left(\frac{t_0 t_1}{ab} + \frac{t_1 t_2}{bc} + \frac{t_2 t_0}{ca}\right)^{\mu}\right],$$

wobei in der Summe

$$(35.) \qquad a = A, \quad b = A + 2B + C, \quad c = C$$

zu setzen ist.

Die Zahl k hat den in § 4 angegebenen Wert.

Aus (34.) ergibt sich nun leicht der weitere Satz:

Bezeichnet h *die Anzahl der Klassen**) *ganzzahliger positiver quadratischer Formen der Determinante* D, *so ist*

$$(36.) \qquad h = \frac{(\mu+1)}{3\pi} \cdot (4D)^{\mu+1}\sqrt{D}\,\Sigma \frac{1}{abc}\left[\left(\frac{t_0 t_1}{ab} + \frac{t_1 t_2}{bc} + \frac{t_2 t_0}{ca}\right)^{\mu}\right],$$

wobei

$$a = A, \quad b = A + 2B + C, \quad c = C$$

ist und die Summation nunmehr über alle Systeme ganzer Zahlen A, B, C *ausgedehnt werden muß, die den Bedingungen*

$$(37.) \qquad A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 = D$$

genügen.

Jedem solchen Systeme A, B, C entspricht ein bestimmtes System positiver ganzer Zahlen a, b, c, die der Bedingung

$$(38.) \qquad 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 = 4D$$

genügen und umgekehrt.

Daher kann die Summe (36.) auch in der Weise gebildet werden, daß man a, b, c alle die Gleichung (38.) befriedigenden Systeme von positiven ganzen Zahlen durchlaufen läßt. Aus der Symmetrie der Gleichung (38.) geht hervor, daß man in jeder auf die Systeme (a, b, c) bezüglichen Summe

---

*) Die „Anzahl" der Klassen ist hier in demselben Sinne zu verstehen wie in § 4.

die Summationsbuchstaben a, b, c beliebig mit einander vertauschen darf. Bezeichnen z. B. ϱ, σ, τ nicht-negative ganze Zahlen und setzt man

$$\{\varrho, \sigma, \tau\} = \Sigma \frac{1}{a^{\varrho+1} b^{\sigma+1} c^{\tau+1}}, \tag{39.}$$

so wird sich der Wert dieser Summe bei einer beliebigen Vertauschung der Exponenten ϱ, σ, τ nicht ändern.

Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung (36.), so erscheint die Klassenzahl h durch Summen der Form (39.) ausgedrückt. Man erhält zunächst für das allgemeine Glied der Summe in (36.) durch Ausführung der μ-ten Potenz

$$\frac{1}{(abc)^{\mu+1}} \Sigma \frac{\mu!}{\mu_0!\,\mu_1!\,\mu_2!} a^{\mu_0} b^{\mu_1} c^{\mu_2} t_0^{\mu_1+\mu_2} t_1^{\mu_2+\mu_0} t_2^{\mu_0+\mu_1},$$

wobei die Summation über alle nicht-negativen Lösungen der Gleichung

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = \mu \tag{40.}$$

zu erstrecken ist. Hier hat man das auftretende Potenzprodukt von t_0, t_1, t_2 nach (17.) zu ersetzen, wodurch die vorstehende Summe nach leichter Umformung übergeht in

$$\frac{1}{(abc)^{\mu+1}} \cdot \frac{\mu!}{(2\mu+2)!} \cdot \Sigma \frac{(\mu-\mu_0)!\,(\mu-\mu_1)!\,(\mu-\mu_2)!}{\mu_0!\,\mu_1!\,\mu_2!} a^{\mu_0} b^{\mu_1} c^{\mu_2}.$$

Trägt man dies in (36.) *ein und benutzt die Bezeichnung* (39.), *so kommt schließlich*

$$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{(\mu+1)!}{(2\mu+2)!} (4D)^{\mu+1} \sqrt{D} \\ &\quad \times \sum_{\mu_0, \mu_1, \mu_2} \frac{(\mu-\mu_0)!\,(\mu-\mu_1)!\,(\mu-\mu_2)!}{\mu_0!\,\mu_1!\,\mu_2!} \{\mu-\mu_0, \mu-\mu_1, \mu-\mu_2\}. \end{aligned}\right. \tag{41.}$$

Die Summation ist der Gleichung (40.) *gemäß auszuführen.*

Im Falle $\mu = 0$ fällt die Gleichung (41.) mit (13.) oder (14.) von § 4 zusammen.

In den Fällen $\mu = 1, 2, 3$ spezialisiert sich (41.) wie folgt:

$$h = \frac{4}{3\pi} D^2 \sqrt{D} \cdot \Sigma \frac{1}{a^2 b^2 c}, \tag{41$_1$.}$$

$$h = \frac{16}{15\pi} D^3 \sqrt{D} \cdot \Sigma \left(\frac{1}{a^3 b^3 c} + \frac{1}{a^3 b^2 c^2} \right), \tag{41$_2$.}$$

$$(41_3.) \qquad h=\frac{32}{315\pi}D^4\sqrt{D}\cdot\Sigma\Big(\frac{9}{a^4b^4c}+\frac{18}{a^4b^3c^2}+\frac{4}{a^3b^3c^3}\Big).$$

Die Summen in $(41_1.)$ und $(41_2.)$ lassen sich in ähnlicher Weise umformen wie die in § 4 unter (13.) auftretende Summe. Man findet hierdurch die beiden folgenden Darstellungen der Klassenzahl:

$$(42.)\quad h=\frac{4}{3\pi}D^2\sqrt{D}\Big[\frac{1}{D^2}\sum_{rs=D}\frac{1}{r+s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^2}\sum_{rs=n^2+D}\Big(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\Big)\Big],$$

$$(43.)\quad \begin{cases} h=\dfrac{16}{15\pi}D^3\sqrt{D}\Big[\dfrac{1}{D^3}\displaystyle\sum_{rs=D}\frac{1}{r+s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^3}\sum_{rs=n^2+D}\Big(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\Big) \\ \qquad +\dfrac{1}{D^2}\displaystyle\sum_{rs=D}\frac{1}{(r+s)^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^2}\sum_{rs=n^2+D}\Big(\frac{1}{(r+s+2n)^3}+\frac{1}{(r+s-2n)^3}\Big)\Big]. \end{cases}$$

Für $D=1$ ergibt (42.), wenn man die Rechnung bei $n=3$ abbricht, für die Klassenzahl h den angenäherten Wert

$$h=\frac{4}{3\pi}\Big[\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\Big(\frac{1}{5}+1\Big)+\frac{2}{25}\Big(\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Big)+\frac{2}{100}\Big(\frac{1}{17}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+1\Big)\Big]=\frac{1}{2}\cdot 0{,}99716\ldots.$$

Für $D=2$ ergab (43.) bei Berücksichtigung der Glieder bis $n=4$ (wobei noch die $n=5$ entsprechenden Glieder $\frac{2}{27^2}\cdot\frac{1}{2^3}$ und $\frac{2}{27^3}\cdot\frac{1}{2}$ mitgenommen wurden)

$$h=\frac{128\sqrt{2}}{15\pi}\Big[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{27}\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\Big)+\cdots+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3^3}+\frac{7}{9}\Big(\frac{1}{6^3}+\frac{1}{2^3}\Big)+\cdots\Big]=0{,}99772\ldots.$$

Da die Klassenzahl, abgesehen von den partikulären Fällen, wo D ein Quadrat oder das Dreifache eines Quadrates ist, eine ganze Zahl ist, so braucht man die sie darstellenden Reihen nur so weit zu berechnen, bis man sicher ist, daß der Betrag der vernachlässigten Glieder unterhalb 1 liegt. Hierzu bedarf es einer näheren Untersuchung des Restes der in Rede stehenden Reihen, wobei die Bestimmung des asymptotischen Wertes gewisser zahlentheoretischer Funktionen erforderlich zu sein scheint.

In betreff des Restes R_m der in (42.) auftretenden Reihe:

$$(44.)\quad R_m=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\psi(n,D)}{(n^2+D)^2},\qquad \psi(n,D)=\sum_{rs=n^2+D}\Big(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\Big)$$

mögen hier nur folgende Bemerkungen Platz finden.

Sobald n eine gewisse Grenze N überschritten hat, wird die Gleichung

$$rs=n^2+D$$

keine Lösung, für die $s=r$ ist, besitzen, weil nur für endlich viele Zahlen r, n

$$r^2 = n^2 + D, \quad \text{d. i.} \quad (r+n)(r-n) = D$$

sein kann. Es ist daher, für $n > N$,

$$\psi(n, D) = 2 \cdot \Sigma\Big(\frac{1}{r+s+2n} + \frac{1}{r+s-2n}\Big). \qquad (45.)$$

$(rs = n^2 + D,\ r > s)$

Unter den Zahlen $r+s+2n$, die in dieser Summe auftreten, sind keine zwei gleiche vorhanden, da aus

$$r+s = r'+s', \qquad rs = r's', \qquad r > s, \qquad r' > s'$$

notwendig $r = r'$, $s = s'$ folgt. Die größte unter diesen Zahlen ist

$$1 + (n^2 + D) + 2n = D + (n+1)^2.$$

Daher ist

$$\Sigma \frac{1}{r+s+2n} \leqq \sum_{k=1}^{D+(n+1)^2} \frac{1}{k} = C + \lg\left(D + (n+1)^2\right) + \varepsilon$$
$$= C + 2\lg n + \varepsilon',$$

wo ε' mit unendlich wachsendem n verschwindet und C die *Mascheroni*sche Konstante bezeichnet. Ebenso ergibt sich

$$\Sigma \frac{1}{r+s-2n} \leqq \sum_{k=1}^{D+(n-1)^2} \frac{1}{k} = C + 2\lg n + \varepsilon''$$

und folglich

$$\psi(n, D) < 4\,(C + 2\lg n + \eta_n), \qquad (46.)$$

wo η_n mit unendlich wachsendem n verschwindet.

Sobald $m > N$ vorausgesetzt wird, ist daher

$$R_m < 4 \sum_{m}^{\infty} \frac{C + 2\lg n + \eta_n}{(n^2 + D)^2},$$

eine Ungleichung, die über den Grad der Konvergenz der Entwicklung (42.) einigen Aufschluß gibt.

Über eine besondere *Dirichlet*sche Reihe.

Von Herrn *W. Wirtinger* in Wien.

Im folgenden soll die Tatsache, daß eine symmetrische Funktion aller bei Umlaufung einer Stelle entstehenden Zweige einer mehrdeutigen Funktion in der Umgebung dieser Stelle eindeutig ist, zur Herleitung einiger Transformationsformeln verwendet werden, welche sich auf Funktionen beziehen, die mit der *Riemann*schen ζ-Funktion eng zusammenhängen. Für diese selbst ergibt sich dabei eine neue Darstellung.

Definiert man die Funktion $l(l(x))$ so, daß sie auf der reellen Achse von 1 bis ∞ reelle Werte annimmt, wird ferner die Strecke $0, 1$ als ein Schnitt in der Ebene der Variablen x gezogen, so ist in dem übrigbleibenden Bereich die Funktion

$$e^{-sl(lx)} = (lx)^{-s} \tag{1.}$$

unendlich vieldeutig. Ist dann der reelle Teil von s größer als 1, so konvergiert die über alle Werte der Funktion $(lx)^{-s}$, welche sie bei Umlaufung der Strecke $0, 1$ annehmen kann, erstreckte Summe gleichmäßig und ist eindeutig, ausgenommen die Strecke $0, 1$, bei deren Überschreitung andere Zweige der Funktion eintreten.

Es ist also dann

$$\Phi(x, s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (l(x) + 2k\pi i)^{-s} \tag{2.}$$

in diesem Gebiete eine eindeutige Funktion von x.

Dabei ist zu beachten, daß den einzelnen Gliedern der Summe jene Werte beizulegen sind, welche aus dem durch (1.) definierten Werte von $(lx)^{-s}$ hervorgehen, wenn die Strecke $0, 1$ von der Variablen $|k|$-mal im positiven bezw. negativen Sinn umlaufen wird.

Da $\Phi(x, s)$ außerhalb des Einheitskreises eindeutig und im Unendlichen gleich Null ist, so kann es in diesem Gebiet in eine nach negativen ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe ohne konstantes Glied entwickelt werden.

Man hat daher

$$\Phi(x, s) = \sum_1^\infty a_\nu x^{-\nu} \tag{3.}$$

und

$$2\pi i a_\nu = \int_{(R)} \Phi(x, s)\, x^{\nu-1}\, dx, \tag{4.}$$

die Integration erstreckt über einen Kreis vom Radius $R > 1$.

Setzt man hier $x = Re^{i\varphi}$ und integriert gliedweise, so kann man die einzelnen Glieder zusammenziehen und man erhält

$$2\pi a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (l(R) + i\varphi)^{-s} e^{\nu(lR+i\varphi)}\, d\varphi. \tag{5.}$$

Führt man hier $lR + i\varphi = z$ als neue Variable ein, so kommt

$$2\pi i a_\nu = \int_{lR-i\infty}^{lR+i\infty} z^{-s} e^{\nu z}\, dz. \tag{6.}$$

Man erkennt nun sofort, daß sich dieses Integral auf die Gammafunktion zurückführen läßt, wenn man den Integrationsweg in eine die Strecke $0, -\infty$ in der z-Ebene umlaufende Schleife deformiert, was wegen des positiven ν und der Annahme über s ohne weiteres gestattet ist. Man erhält so

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \sin \pi s\, \Gamma(1-s)\, \nu^{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)}\, \nu^{s-1} \tag{7.}$$

und daher die Entwicklung

$$\Phi(x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_1^\infty x^{-\nu}\, \nu^{s-1}, \tag{8.}$$

giltig für $|x| > 1$, wenn auch der reelle Teil von s größer ist als 1.

Die rechte Seite von (8.) stellt aber, wenn nur $|x| > 1$, für jedes s eine analytische Funktion von s dar, und zwar eine ganze eindeutige Funktion von s.

Um aber die analytische Fortsetzung auch für jedes x zu gewinnen, benutzen wir den Umstand, daß die Funktionalgleichung*) besteht

$$\frac{\partial \Phi(x,s)}{\partial x} = -\frac{s}{x}\Phi(x, s+1). \tag{9.}$$

Da nun der betrachtete Zweig von $\Phi(x, s)$ im Unendlichen verschwindet, so folgt hieraus

$$\Phi(x, s) = s\int_x^\infty \Phi(x, s+1)\frac{dx}{x}. \tag{10.}$$

Ist der reelle Teil von s positiv, wenn auch kleiner als 1, so kann man die Integration der Summe nicht mehr direkt gliedweise bis ins Unendliche ausführen, wohl aber bis zu einem endlichen Wert a, wenn $|a|>1$. Zerlegt man aber den Integrationsweg in zwei Teile von x bis a und von a bis ∞ und benutzt für das zweite Integral die Entwicklung (8.), so folgt

$$\Phi(x, s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [(l(x)+2k\pi i)^{-s} - (l(a)+2k\pi i)^{-s}] + \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_1^\infty a^{-\nu}\nu^{s-1}. \tag{11.}$$

Diese Formel gilt nun für jedes s mit positivem reellem Teil und jedes x auch bei beliebiger analytischer Fortsetzung, wenn nur den einzelnen Potenzen in der ersten Summe die richtigen Werte beigelegt werden. Um diese zu bestimmen, hat man zuerst die bei k-maligem Umlauf um 0,1 aus $e^{-sl(l(a))}$ hervorgehenden Werte zu bestimmen, sodann aber in allen diesen Werten noch a den Integrationsweg bis x durchlaufen zu lassen. Um die Fortsetzung für beliebige Werte von s zu erhalten, kann man in der gleichen Weise die Gleichung (10.) wiederholt benutzen. Man erkennt so, daß bei beliebiger analytischer Fortsetzung in bezug auf s und x die Funktion $\Phi(x, s)$ immer eine ganze Funktion von s bleibt. Dagegen ist zu bemerken, daß die übrigen Zweige von $\Phi(x, s)$ nicht nur die Stellen 0,1, sondern auch die Stelle ∞ als singuläre haben, einzig den durch (8.) definierten Zweig ausgenommen.

Im besondern ergibt sich, daß die Funktion

$$\Phi_1(x, s) = \Phi(x, s) - (lx)^{-s} \tag{12.}$$

*) Man vergleiche die im wesentlichen mit (9.) zusammenfallende Gleichung, welche *H. Hilbert* in seinen „mathematischen Problemen“ anführt.

in der Umgebung der Stelle $x=1$ einen regulären Zweig hat, der aus dem durch (8.) definierten Zweig von $\Phi(x, s)$ hervorgeht. Dieser läßt sich daher in eine nach ganzen positiven Potenzen von $1-x$ oder auch nach $l(x)$ in der Umgebung dieser Stelle entwickeln. Die Entwicklungskoeffizienten sind dann ebenfalls ganze analytische Funktionen von s, welche für jedes s definiert sind.

Wird nun zunächst der reelle Teil von s größer als 1 genommen, so kann man zur Berechnung von $\Phi_1(1, s)$ unmittelbar Formel (2.) verwenden und man erhält, wenn man beachtet, daß nach unseren Festsetzungen $2k\pi i$ bei positiven k das Argument $\frac{\pi i}{2}$, dagegen bei negativen k das Argument $-\frac{\pi i}{2}$ erhalten muß,

$$\Phi_1(1, s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2} \sum_1^\infty k^{-s}. \tag{13.}$$

Da nun die linke Seite für jedes s fortsetzbar ist, so ist es auch die rechte Seite und es ist für jedes s

$$\Phi_1(1, s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2} \zeta(s), \tag{14.}$$

womit also auch ein Beweis für die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ erbracht ist, und zwar so, daß nur die singulären Stellen $s=1, -1, -3, -5, \ldots$ usw. möglich sind.

Nimmt man aber zweitens an, der reelle Teil von s sei negativ, so konvergiert die rechte Seite der Formel (8.) für $x=1$ und es verschwindet $(l(x))^{-s}$ für diesen Wert. Man erhält also dann

$$\Phi_1(1, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \zeta(1-s) \tag{15.}$$

und wegen der unbeschränkten Fortsetzbarkeit der linken Seite gilt diese Formel wieder für jeden Wert von s. Hieraus ergibt sich, daß $\zeta(1-s)$ nur die singulären Stellen $0, -1, -2, \ldots$ haben kann, also $\zeta(s)$ nur die singulären Stellen $1, 2, 3$, usw. haben kann, was zusammen mit dem aus (14.) Gefolgerten nur die singuläre Stelle 1 für $\zeta(s)$ ergibt. Zugleich erhält man aus (14.) und (15.) zusammen die bekannte *Riemann*sche Gleichung

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{s\pi}{2} \Gamma(s) \zeta(s). \tag{16.}$$

Die übrigen Entwicklungskoeffizienten von $\Phi_1(x, s)$ kann man durch Ent-

wicklung der einzelnen Glieder von (2.) nach dem binomischen Satz finden, wobei man erhält

$$(17.)\quad \Phi(x,s)=(lx)^{-s}+2(2\pi)^{-s}\sum_{0}^{\infty}\cos\frac{(s+n)\pi}{2}\zeta(s+n)\binom{-s}{n}\left(\frac{l(x)}{2\pi}\right)^{n}.$$

Der Konvergenzbereich von (17.) ist gegeben durch $|l(x)|<2\pi$. Vergleicht man die Reihe (17.) mit der Reihe (8.), so erhält man nach leichter Umformung die von Herrn *E. Lindelöf* gefundene Entwicklung.*)

Für die Funktion $\zeta(s)$ selbst aber erhält man aus (11.) durch Vergleich mit (14.) noch die Formel

$$(18.)\quad \begin{cases} 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s)=\sum'_{k=-\infty}^{+\infty}\left((2k\pi i)^{-s}-(l(a)+2k\pi i)^{-s}\right) \\ \qquad\qquad -(l(a))^{-s}+\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{1}^{\infty}a^{-\nu}\nu^{s-1}, \end{cases}$$

in welcher der Akzent beim Summenzeichen in der üblichen Weise bedeutet, daß das Glied mit $k=0$ wegzulassen ist. Die Formel ist giltig für jedes s mit positivem reellem Teil und jedes $|a|>1$.

Man könnte der Formel (17.) analoge an die Seite stellen mit einem Konvergenzbezirk $|l(x)|<2h\pi$, wo h eine ganze Zahl bedeutet, wenn man die Entwicklung nach dem binomischen Satz erst auf die Glieder mit $|k|\geq h$ anwendet. Dieses Ergebnis könnte noch mit Hilfe der *Euler*schen Summenformel umgestaltet werden.

Ferner könnte man der Formel (18.) analoge Formeln aufstellen, welche gelten, sobald der reelle Teil von s größer als eine ganze negative Zahl ist, indem man die erwähnten der Formel (11.) analogen Formeln benutzt.

Setzt man ferner in Formel (8.) einmal $x=e^{2\pi i\omega}$ und das andere Mal $x=e^{-2\pi i\omega}$, so erhält man zwei Formeln, aus denen durch passende Kombination die von *H. Hurwitz***) gegebene Formel hervorgeht.

Auch die erste *Riemann*sche Darstellung von $\zeta(s)$ durch ein bestimmtes Integral erhält man einfach aus den vorstehenden Entwicklungen. Aus der Gleichung (12.) folgt nämlich nach dem *Cauchy*schen Satz

$$(19.)\qquad 2\pi i\Phi_1(1,s)=\int_{(b)}\frac{\Phi(x,s)}{x-1}dx-\int_{(b)}\frac{(l(x))^{-s}}{x-1}dx.$$

---

*) Le Calcul des Résidus, Paris, Gauthier Villars 1905, S. 139.

**) Zeitschrift für Mathem. u. Phys. 27 (1882).

Dabei sind die Integrale rechts von einem Punkte b der Strecke 0, 1 über einen positiven Umlauf um den Punkt 1 bis wieder nach b zu erstrecken.

Nimmt man nun zuerst wieder an, es sei der reelle Teil von s größer als 1, so ist $\Phi(0, s) = 0$ und man kann für den Punkt b auch den Nullpunkt nehmen.

Das erste Integral in (19.) verschwindet aber unter der Voraussetzung für s. Erstreckt man nämlich das Integral über eine 0, 1 einmal umlaufende geschlossene Kurve, so zeigt Formel (8.) unmittelbar das Verschwinden desselben, und da die Funktion auch noch für $x = 0$ nach der Annahme über s integrierbar bleibt, so ist auch

$$(20.) \qquad \int_{(0)} \frac{\Phi(x, s)dx}{x-1} = 0.$$

Daher folgt aus (19.)

$$(21.) \qquad \Phi_1(1, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\zeta(1-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{(l(x))^{-s}dx}{1-x}.$$

Man erkennt, daß hier das Integral für jeden Wert von s eine analytische Funktion definiert.

Schreibt man statt $1-s$ nun s und setzt $x = e^{-z}$, so erhält man genau die *Riemann*sche Formel.

Nimmt man jedoch in (21.) als Integrationsweg einen Kreis vom Radius 1 mit dem Mittelpunkt 1, setzt also $x = 1 + e^{i\varphi}$, so erhält man die Formel

$$(22.) \qquad \frac{1}{\Gamma(s)}\zeta(1-s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (l(1+e^{i\varphi}))^{-s}d\varphi.$$

Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz.

Von Herrn *Hermann Minkowski* in Göttingen.

Inhalt:

	Seite
Problemstellung	220
§ 1. Charakter der positiven quadratischen Formen	222
§ 2. Anordnung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit	223
§ 3. Niedrigste Formen in einer Klasse	224
§ 4. Reduzierte Formen	227
§ 5. Die Wände des reduzierten Raumes	230
§ 6. Die Kanten des reduzierten Raumes	238
§ 7. Die Nachbarkammern des reduzierten Raumes	240
§ 8. Die Determinantenfläche	243
§ 9. Das Problem der dichtesten gitterförmigen Lagerung von Kugeln	245
§ 10. Bestimmung der extremen Formenklassen	247
§ 11. Die binären, ternären, quaternären Formen	250
§ 12. Volumen des reduzierten Raumes bis zur Determinantenfläche	251
§ 13. Verwendung *Dirichlet*scher Reihen	254
§ 14. Auswertung des Volumens	264
§ 15. Maximale Dichte bei gitterförmiger Lagerung von Kugeln	268
§ 16. Asymptotisches Gesetz für die Klassenanzahlen ganzzahliger Formen	269

Problemstellung.

Die vorliegende Arbeit benutzt mehrfach Methoden, welche von *Dirichlet* ausgebildet worden sind.

Ich stellte mir folgendes Problem:

Ein System von n linearen Formen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mit n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, mit beliebigen reellen Koeffizienten

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_k} = a_{hk}$$

und von Null verschiedener Determinante heiße einem zweiten solchen Systeme $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *arithmetisch äquivalent*, wenn jedes der zwei Systeme sich in das andere durch eine homogene lineare *Substitution mit lauter*

ganzzahligen Koeffizienten transformieren läßt. Es soll nun *in der Mannigfaltigkeit* A *der* n^2 *reellen Parameter* α_{hk} *ein Bereich* B konstruiert werden, in welchem *jede* vollständige Vereinigung (*Klasse*) unter einander äquivalenter Systeme *durch einen Punkt*, und wenn der Punkt ins Innere des Bereichs zu liegen kommt, auch nur durch einen einzigen Punkt repräsentiert wird.

Dieses Problem läßt sich sofort auf ein entsprechendes Problem über positive quadratische Formen zurückführen. Wir bilden aus $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ die Quadratsumme

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = f.$$

Sie ist eine *positive quadratische Form der n Variabeln* $x_1, x_2, \dots x_n$ mit den Koeffizienten

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} = a_{hk} = \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \cdots + \alpha_{nh}\alpha_{nk}.$$

Wir betrachten die $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit A der $\frac{n(n+1)}{2}$ beliebig veränderlichen reellen Parameter a_{hk}. Jedem Punkte $f=(a_{hk})$ dieser Mannigfaltigkeit A, für den die Form f sich als wesentlich positiv erweist, entspricht auf Grund der eben hingeschriebenen Gleichungen noch ein $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionales Gebiet A(f) von Punkten (α_{hk}) in der Mannigfaltigkeit A.

Wir übertragen den Begriff der arithmetischen Äquivalenz und Klasse sinngemäß auf die positiven quadratischen Formen, und *wir suchen in der Mannigfaltigkeit A einen Bereich B, in dem jede Klasse positiver quadratischer Formen durch einen Punkt, und wenn der Punkt in das Innere von B fällt, auch nur durch einen einzigen Punkt repräsentiert wird.*

Alsdann bilden die Gebiete A(f) zu allen in B gelegenen Punkten f den verlangten Diskontinuitätsbereich B in der Mannigfaltigkeit A.

Ich werde nachweisen, daß *der Diskontinuitätsbereich B für die arithmetische Äquivalenz der positiven quadratischen Formen* derart konstruiert werden kann, daß er *in der Mannigfaltigkeit A einen von einer endlichen Anzahl von Ebenen begrenzten konvexen Kegel* mit dem durch $f=0$ repräsentierten Nullpunkte als Spitze vorstellt.

Durch diesen Satz wird für die positiven quadratischen Formen mit n Variabeln die Theorie der arithmetischen Äquivalenz auf dieselbe Höhe gebracht, welche sie für die ternären Formen durch die Abhandlung von

Dirichlet: Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen erreichte.

Derjenige Teil des Diskontinuitätsbereichs B, welcher den Formen f mit einer Determinante $\leqq 1$ entspricht, besitzt ein endliches Volumen. Für $n=2$ kommt dieses Volumen wesentlich auf den nichteuklidischen Flächeninhalt des Fundamentalbereichs der elliptischen Modulfunktion $J(\omega)$ hinaus. Die allgemeine Ermittlung jenes Volumens gelingt hier mit Hilfe derjenigen Prinzipien, auf welche *Dirichlet* die Berechnung der Klassenanzahlen der ganzzahligen binären quadratischen Formen gegründet hat, *und zwar kommt das analytische Element in diesen Prinzipien gerade bei der hier zu machenden Anwendung am reinsten zum Vorschein.*

Mit jenem Volumen hängen gewisse asymptotische Gesetze betreffs der Formen mit ganzzahligen Koeffizienten zusammen. Andererseits ermöglicht der Wert des Volumens einen Schluß auf die dichteste Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch lauter kongruente Kugeln.

Die einschlägige Literatur zu den hier behandelten Gegenständen ist in meiner Arbeit im 107. Bande dieses Journals ausführlich genannt und verweise ich dieserhalb auf die dortigen Angaben.

§ 1. *Charakter der positiven quadratischen Formen.*

Es sei

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{hk} x_h x_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine quadratische Form der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit reellen Koeffizienten a_{hk}. Wir setzen stets $a_{kh} = a_{hk}$ für $h < k$ voraus. Die aus der $h_1, h_2, \ldots h_\nu$-ten Horizontal- und der $k_1, k_2, \ldots k_\nu$-ten Vertikalreihe des quadratischen Schemas der a_{hk} hergestellte ν-reihige Determinante bezeichnen wir mit

$$D\begin{pmatrix} h_1, h_2, \ldots h_\nu \\ k_1, k_2, \ldots k_\nu \end{pmatrix}.$$

1. Dafür, daß f eine *wesentlich positive* Form sei, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die n Determinanten

$$D\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots h \\ 1, 2, \ldots h \end{pmatrix} = D_h \text{ für } h = 1, 2, \ldots n$$

sämtlich positiv sind. Die letzte dieser Größen, D_n, ist die Determinante der Form f, deren Wert wir auch mit $D(f)$ bezeichnen. Wir setzen noch $D_0 = 1$,

$$\underset{(h=1,2,\dots n)}{\frac{D_h}{D_{h-1}} = q_h}; \qquad \frac{D\begin{pmatrix}1, \dots h-1, h\\ 1, \dots h-1, k\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}1, \dots h-1, h\\ 1, \dots h-1, h\end{pmatrix}} = \gamma_{hk} \qquad \begin{pmatrix}h=1, \dots n-1\\ k=h+1, \dots n\end{pmatrix}.$$

Dann sind auch alle Größen $q_h > 0$ und besteht die identische Darstellung

$$(1.) \qquad f = q_1\zeta_1^2 + q_2\zeta_2^2 + \cdots + q_n\zeta_n^2$$

mit

$$(2.) \quad \zeta_1 = x_1 + \gamma_{12}x_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n, \quad \zeta_2 = x_2 + \cdots + \gamma_{2n}x_n, \dots\dots \zeta_n = x_n,$$

welche den *Charakter von f als positive Form in Evidenz* setzt.

2. Die Vergleichung der Koeffizienten von $x_1^2, x_2^2, \dots x_n^2$ auf beiden Seiten von (1.) ergibt

$$(3.) \qquad a_{11} = q_1, \quad a_{22} \geqq q_2, \dots a_{nn} \geqq q_n$$

und *durch Multiplikation dieser Ungleichungen folgt*

$$(4.) \qquad a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \geqq D(f).$$

3. Ist L ein gegebener positiver Wert und soll $f \leqq L$ ausfallen, so folgt aus (1.):

$$|\zeta_n| \leqq \sqrt{\frac{L}{q_n}}, \quad |\zeta_{n-1}| \leqq \sqrt{\frac{L}{q_{n-1}}}, \dots |\zeta_1| \leqq \sqrt{\frac{L}{q_1}},$$

und diesen Ungleichungen können nach den Ausdrücken (2.) nur eine *endliche* Anzahl verschiedener ganzzahliger Systeme $x_n, x_{n-1}, \dots x_1$ genügen. Wir haben daher den Satz:

Eine positive quadratische Form f kann nur für eine endliche Anzahl von ganzzahligen Systemen der Variabeln Werte annehmen, die eine gegebene Schranke L nicht überschreiten.

§ 2. *Anordnung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.*

Sind $a_1, a_2, \dots a_n$ und $b_1, b_2, \dots b_n$ zwei verschiedene Systeme von je n Größen und hat man

$$a_1 = b_1, \dots, a_{l-1} = b_{l-1}, \quad a_l > b_l,$$

wo l einen der Werte $1, 2, \ldots n$ bedeuten kann, so heiße das erste System *höher*, das zweite *niedriger* als das andere, und zwar *an l-ter Stelle* höher bezw. niedriger.

Es sei eine unendliche Menge von Systemen $S(a_1, a_2, \ldots a_n)$ vorgelegt mit folgender Eigenschaft: Ist $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein beliebiges System daraus und l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots n$, so soll bei allen vorhandenen Systemen $b_1, b_2, \ldots b_n$ der Menge, welche genau an l-ter Stelle niedriger als das erste System sind, für die Größe b_l jedesmal nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werte in Betracht kommen.

Bildet man alsdann von einem beliebigen Systeme S der Menge ausgehend, soweit als angängig, *eine Reihe von Systemen* $S, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$, *sodaß jedes folgende niedriger als das vorhergehende ist, so muß eine solche Reihe stets nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen.* Es muß sich also nach einer endlichen Anzahl von Schritten schließlich ein System einstellen, zu welchem es kein niedrigeres in der Menge gibt, und welches demnach das *niedrigste* System in der Menge vorstellt.

Für $n = 1$ ist die Behauptung evident. Nun sei $n > 1$. Betrachten wir zum Ausgangssysteme $S(a_1, a_2, \ldots a_n)$ alle Systeme $a_1, b_2, \ldots b_n$ der Menge, welche mit ihm in dem ersten Elemente a_1 übereinstimmen, so bilden die darin auftretenden Systeme $b_2, \ldots b_n$ eine Menge von Systemen aus $n-1$ Elementen mit ganz entsprechender Eigenschaft, wie wir sie für die gegebene Menge n-gliedriger Systeme voraussetzen. Nehmen wir nun den zu beweisenden Satz bereits als erwiesen an, wenn die Zahl $n-1$ anstatt n steht, so kann eine Reihe $S, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ nur mit einer *endlichen* Anzahl von Termen derart fortschreiten, daß *das erste Element ungeändert* bleibt und jedesmal eine *Erniedrigung an der zweiten bis n-ten Stelle* eintritt. Da außerdem eine *Erniedrigung genau an erster Stelle* nach Voraussetzung ebenfalls nur eine endliche Anzahl von Malen vorkommen kann, so ist der zu beweisende Satz sofort für Systeme aus n Gliedern klar.

§ 3. *Niedrigste Formen in einer Klasse.*

Der Begriff der arithmetischen Äquivalenz von positiven quadratischen Formen ist schon in der Einleitung erwähnt worden. Zwei positive Formen

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \quad g = \Sigma b_{hk} y_h y_k \qquad (h, k = 1, \ldots n)$$

sind hierbei dann und nur dann *äquivalent*, wenn f in g durch eine *ganzzahlige Transformation mit einer Determinante* ± 1 überzuführen ist.

1. Ist dabei

$$(5.) \qquad a_{11} = b_{11}, \quad a_{22} = b_{22}, \ldots a_{nn} = b_{nn},$$

so mögen f und g *gleichgestellt* heißen. Ist dagegen

$$(6.) \qquad a_{11} = b_{11}, \ldots a_{l-1,l-1} = b_{l-1,l-1}, \quad a_{ll} > b_{ll},$$

wobei l einen der Werte $1, 2, \ldots n$ haben kann, so soll f *höher* als g und g *niedriger* als f und zwar *an l-ter Stelle* höher bezw. niedriger heißen.

Es sei

$$(7.) \qquad x_h = s_{h1} y_1 + s_{h2} y_2 + \cdots + s_{hn} y_n \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

eine ganzzahlige Substitution mit einer Determinante ± 1, welche f in g überführt, so hat man

$$b_{kk} = f(s_{1k}, \ldots s_{nk}) \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Ist g *an l-ter Stelle niedriger als* f, so folgt daher

$$(8.) \quad f(s_{11}, \ldots s_{n1}) = a_{11}, \ldots f(s_{1,l-1}, \ldots s_{n,l-1}) = a_{l-1,l-1}, \quad f(s_{1l}, \ldots s_{nl}) < a_{ll}.$$

Ferner ist *die aus den l ersten Vertikalreihen* der Substitution (7.) *gebildete Matrix*

$$(9.) \qquad \|s_{hk}\| \qquad (h = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots l)$$

unimodular, d. h. der größte gemeinsame Teiler aller aus ihr zu bildenden l-reihigen Determinanten ist gleich 1.

Hiernach ist leicht zu entscheiden, *ob es in der Klasse von f eine Form g gibt, welche niedriger als f ist.* Wir nehmen für l nach einander jeden der Werte $1, 2, \ldots n$ und fassen jedesmal das System der Bedingungen (8.) ins Auge. Nach § 1 kann es jedesmal gewiß nur eine *endliche* Anzahl von ganzen Zahlen s_{hk} $(k \leqq l)$ geben, welche diesen Bedingungen genügen. Sowie für eines der betreffenden Lösungssysteme die *Matrix* (9.) *unimodular* ist, können wir bekanntlich zu dieser Matrix $n - l$ weitere Vertikalreihen ganzzahliger Koeffizienten s_{hk} $(k = l+1, \ldots n)$ hinzufügen, sodaß die Determinante des entstehenden quadratischen Schemas ± 1 wird, und es führt dann die zugehörige Substitution (7.) in der Tat f in eine an l-ter Stelle niedrigere Form g über. *Dabei kommen jedesmal für* b_{ll} *nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Frage.*

2. Auf Grund des Hilfssatzes in § 2 kann man nunmehr *in jeder Klasse f eine solche Form g* ermitteln, *zu welcher es keine niedrigere Form in der Klasse gibt* und welche wir daher eine *niedrigste* Form der Klasse nennen. Alle äquivalenten mit ihr gleichgestellten Formen sind gleichzeitig niedrigste Formen der Klasse.

3. Soll die Form f durch die Substitution (7.) in eine *gleichgestellte* Form übergehen, so müssen die n Gleichungen

$$f(s_{11}, \dots s_{n1}) = a_{11}, \dots f(s_{1n}, \dots s_{nn}) = a_{nn}$$

statthaben; es genügen ihnen nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Systeme s_{hk} und *gibt es* daher gewiß auch *nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Substitutionen mit einer Determinante* ± 1, *durch welche eine Form in gleichgestellte übergeht.* Insbesondere zeigt sich, daß *jede positive Form nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Transformationen in sich* besitzt.

4. Jede Form f geht durch die 2^n Substitutionen

$$(10.) \qquad x_1 = \pm y_1, \; x_2 = \pm y_2, \dots x_n = \pm y_n,$$

wobei ein jedes der n Vorzeichen unabhängig von den anderen als $+$ oder $-$ angenommen werden kann, in gleichgestellte Formen über.

5. Es möge für einen Moment eine Form f und die ganze zugehörige Klasse *allgemein* heißen, wenn eine Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(y_1, y_2, \dots y_n)$$

mit ganzzahligen Werten $x_1, x_2, \dots x_n$; $y_1, y_2, \dots y_n$ niemals anders bestehen kann, als daß das System $y_1, y_2, \dots y_n$ mit $x_1, x_2, \dots x_n$ oder mit $-x_1, -x_2, \dots -x_n$ übereinstimmt. Insbesondere wird dieser Charakter für f zutreffen, wenn zwischen den $\frac{n(n+1)}{2}$ Koeffizienten a_{hk} von f keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten besteht. Vergleichen wir insbesondere die zwei Systeme

$$x_h = 1, \; x_{h+1} = 1, \; x_k = 0 \quad \text{und} \quad y_h = 1, \; y_{h+1} = -1, \; y_k = 0 \; (k \gtrless h, h+1)$$

mit einander, so zeigt sich, daß in einer allgemeinen Form f gewiß jeder Koeffizient $a_{h,h+1}$ von Null verschieden ausfällt.

Ist die Klasse f eine allgemeine, so geht offenbar jede Form daraus einzig durch die 2^n Substitutionen (10.) in äquivalente gleichgestellte Formen über, und gibt es in der Klasse stets *eine einzige niedrigste Form g, welche*

noch die Bedingungen

$$b_{12} > 0, \quad b_{23} > 0, \ldots b_{n-1,n} > 0$$

erfüllt.

6. Wir bezeichnen mit E *die identische Substitution*, ferner zu jeder Substitution S als *entgegengesetzte* und mit $-S$ diejenige Substitution, welche durch Änderung aller Koeffizienten s_{hk} in die entgegengesetzten Werte $-s_{hk}$ entsteht.

§ 4. *Reduzierte Formen.*

Es sind wesentlich die niedrigsten Formen einer Klasse, welche *Hermite* (dieses Journal Bd. 40) als reduzierte Formen eingeführt hat mit der Absicht, in der Menge dieser Formen einen Diskontinuitätsbereich B von der in der Einleitung dargelegten Natur zu erhalten. Hier bringen wir gegenüber der *Hermite*schen Definition eine Vereinfachung dadurch an, daß wir gewisse kompliziertere Charaktere, welche für niedrigste Formen zu fordern wären, die ihren Einfluß aber nur auf Teile der Begrenzung des Diskontinuitätsbereiches äußern würden, beiseite lassen.

1. Es sei l eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$, und wir wollen unter $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ hier *allgemein ein solches System von n ganzen Zahlen* verstehen, *wobei der größte gemeinsame Teiler* der letzten $n-(l-1)$ Zahlen darunter, also *von* $s_l^{(l)}, s_{l+1}^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ *gleich* 1 *ist.* Ferner bedeute $e_1^{(l)}, e_2^{(l)}, \ldots e_n^{(l)}$ speziell die l-te Vertikalreihe der identischen Substitution E.

Zu jedem Systeme $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ kann man offenbar stets *eine ganzzahlige Substitution* $S^{(l)}$ *von einer Determinante* ± 1 herstellen, *in deren quadratischem Koeffizientenschema die ersten* $l-1$ *Vertikalreihen wie bei der identischen Substitution E aussehen und die l-te Reihe von eben jenem Systeme gebildet wird,* also eine Substitution

$$x_h = y_h + s_h^{(l)} y_l + s_{h,l+1} y_{l+1} + \cdots + s_{hn} y_n \qquad (h < l),$$

$$x_h = \quad s_h^{(l)} y_l + s_{h,l+1} y_{l+1} + \cdots + s_{hn} y_n \qquad (h \geq l).$$

Durch eine solche Substitution $S^{(l)}$ geht eine Form

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k \quad \text{in} \quad g = \Sigma b_{hk} y_h y_k$$

über, so daß

$$b_{11} = a_{11}, \ldots b_{l-1,l-1} = a_{l-1,l-1}, \quad b_{ll} = f(s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots s_n^{(l)})$$

ist. Wenn nun f speziell eine niedrigste Form in ihrer Klasse ist, wird hierbei stets $b_{ll} \geqq a_{ll}$ sein müssen.

2. Wir stellen nunmehr folgende Definition auf:

Eine quadratische Form

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{hk} x_h x_k$$

soll eine reduzierte Form heißen, wenn sie allen möglichen Ungleichungen

$$\text{(I.)} \qquad f(s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \dots s_n^{(l)}) \geqq a_{ll}$$

genügt für jedes $l = 1, 2, \dots n$ *und alle ganzzahligen Systeme* $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \dots s_n^{(l)}$, *wobei der größte gemeinsame Teiler der Zahlen* $s_l^{(l)}, s_{l+1}^{(l)}, \dots s_n^{(l)}$ *gleich* 1 *ist, und ferner noch den Bedingungen:*

$$\text{(II.)} \qquad a_{12} \geqq 0, \quad a_{23} \geqq 0, \dots a_{n-1,n} \geqq 0.$$

Wir schließen bei den Ungleichungen (I.) jedesmal ausdrücklich die zwei Systeme $s_h^{(l)} = e_h^{(l)}$ $(h = 1, \dots n)$ und $s_h^{(l)} = -e_h^{(l)}$ $(h = 1, \dots n)$ aus, wofür (I.) keine wirkliche Bedingung in den a_{hk} vorstellen würde.

Bei dieser Definition einer reduzierten Form setzen wir *nicht bereits f als* eine *positive Form* voraus.

3. In einer Klasse positiver Formen ist eine niedrigste Form, welche noch die Zusatzbedingungen (II.) erfüllt, stets eine reduzierte Form. Nach den Ergebnissen des § 3 *gibt es* daher *in jeder Klasse positiver Formen stets wenigstens eine reduzierte Form.*

4. Die zum Index l gehörigen der Ungleichungen (I.) besagen, *daß* a_{ll} *das Minimum unter allen Werten* $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ *für solche ganze Zahlen* $x_1, x_2, \dots x_n$ *ist, wobei* $x_l, x_{l+1}, \dots x_n$ *keinen gemeinsamen Teiler* > 1 *haben.*

Durch eine Substitution $S_l^{(l)}$ gehen die sämtlichen ganzzahligen Systeme $x_1, x_2, \dots x_n$, wobei $x_l, x_{l+1}, \dots x_n$ keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben, in die sämtlichen ganzzahligen Systeme $y_1, y_2, \dots y_n$ über, wobei $y_l, y_{l+1}, \dots y_n$ keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben.

5. Genügt eine positive Form f den Bedingungen (I.) nur für $l = 1, 2, \dots m-1$, aber nicht für $l = m$, so können wir aus ihr durch eine Substitution $S^{(m)}$ eine äquivalente Form herleiten, welche den entsprechenden Bedingungen für $l = 1, 2, \dots m-1$ und auch noch für $l = m$ genügt.

Man hat einfach alle ganzzahligen Systeme $s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \dots s_n^{(m)}$ zu bestimmen, für welche $f(s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \dots s_n^{(m)}) < a_{mm}$ ist und zugleich $s_m^{(m)}, s_{m+1}^{(m)}, \dots s_n^{(m)}$

keinen Teiler >1 haben. Nach Voraussetzung gibt es solche Systeme. Sie sind nur in endlicher Anzahl vorhanden. Man suche unter ihnen diejenigen heraus, welche der Form f den kleinsten Wert erteilen, und setze dann in $S^{(m)}$ als m-te Vertikalreihe ein beliebiges dieser Systeme an, so wird das gewünschte Ziel erreicht sein.

Beachtet man, daß der Typus $S^{(1)}$ eine *beliebige* ganzzahlige Substitution mit der Determinante ± 1 vorstellt, ferner, daß *bei zwei* verschiedenen *Substitutionen* $S^{(l)}(l<n)$ *mit genau gleicher l-ter Vertikalreihe die zweite gleich dem Produkt der ersten in eine Substitution* $S^{(l+1)}$ ist, so enthalten diese Bemerkungen eine Methode, um zu einer gegebenen positiven Form f *alle* ganzzahligen Substitutionen zu finden, durch welche sie in äquivalente reduzierte Formen übergeht.

Zugleich zeigt sich, daß *die Anzahl dieser reduzierenden Substitutionen für jede gegebene positive Form f stets eine endliche* ist.

6. Aus diesen Erwägungen leuchtet ferner ein: *Eine solche reduzierte Form, für welche in keiner einzigen von den Ungleichungen* (I.) *und* (II.) *das Gleichheitszeichen eintritt, kann nur bei Anwendung der identischen Substitution E oder der dazu entgegengesetzten* $-E$ *reduziert bleiben.*

7. Wir fassen nun die Koeffizienten a_{hk} einer quadratischen Form als *Koordinaten eines Punktes f in einer* $\frac{n(n+1)}{2}$*-fachen Mannigfaltigkeit A* auf. In dieser Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit B das Gebiet derjenigen Punkte f, welche allen Ungleichungen (I.) und (II.) genügen. Wir nennen B den *reduzierten Raum.* Das letzte Ergebnis besagt dann:

Eine Form f im Inneren des reduzierten Raumes B, d. h. für welche in keiner der Ungleichungen (I.) und (II.) das Gleichheitszeichen statthat, *geht durch jede von E und* $-E$ *verschiedene unimodulare ganzzahlige Substitution in eine Form außerhalb B über.*

Insbesondere wird eine *allgemeine* Klasse immer durch einen *inneren* Punkt von B repräsentiert.

Der Bereich B geht durch jedes Paar entgegengesetzter unimodularer ganzzahliger Substitutionen $S, -S$ in eine bestimmte *äquivalente Kammer* $B_S = B_{-S}$ über, und *die Kammern, die verschiedenen* solchen *Paaren* $S, -S$ *entsprechen, stoßen unter einander höchstens in Punkten der Begrenzung zusammen.* Die sämtlichen Kammern B_S überdecken den ganzen Raum der positiven Formen.

§ 5. *Die Wände des reduzierten Raumes.*

Die Ungleichungen (I.) zur Definition einer reduzierten Form f sind *in unendlicher Anzahl* vorhanden. Wir werden nunmehr den Satz beweisen:

Es gibt unter den Ungleichungen (I.) *eine endliche Anzahl, welche alle übrigen dieser Ungleichungen zur Folge haben.*

Beweis: 1. *Es sei zunächst* $n=2$, also

$$f=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2.$$

Nehmen wir in (I.): $s_1^{(2)}=\pm 1$, $s_2^{(2)}=1$, so folgt

$$(11.)\qquad a_{11}\pm 2a_{12}+a_{22}\geqq a_{22},\ \mp a_{12}\leqq\frac{1}{2}a_{11}.$$

Aus diesen zwei Bedingungen für die zwei Vorzeichen $\pm$ geht noch $a_{11}\geqq 0$ hervor. Nehmen wir $s_1^{(1)}=0$, $s_2^{(1)}=1$, so entsteht

$$(12.)\qquad a_{22}\geqq a_{11}.$$

Ist $a_{11}=0$, so folgt aus (11.) auch $a_{12}=0$ und gelten wegen $a_{22}\geqq 0$ bereits alle Ungleichungen (I.).

Ist $a_{11}>0$, so folgt aus (11.) und (12.):

$$a_{12}^2\leqq\frac{1}{4}a_{11}^2\leqq\frac{1}{4}a_{11}a_{22},\quad D_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\geqq\frac{3}{4}a_{11}a_{22}.$$

Schreiben wir

$$f=q_1(x_1+\gamma_{12}x_2)^2+q_2x_2^2,$$

so ist

$$q_1=a_{11},\ \gamma_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}},\ \pm\gamma_{12}\leqq\frac{1}{2},\ q_2=\frac{D_2}{q_1}\geqq\frac{3}{4}a_{22}.$$

Für ganze Zahlen s_1, s_2 wird nun, wenn $|s_1|>1$, $s_2=1$ ist:

$$f(\pm|s_1|,1)=a_{11}(s_1^2-|s_1|)+(a_{11}\pm 2a_{12})|s_1|+a_{22}>a_{22},$$

andererseits, wenn $|s_2|>1$ ist:

$$f(s_1,s_2)\geqq q_2s_2^2\geqq 3a_{22}>a_{22}.$$

So leuchtet ein, daß aus (11.) *und* (12.) *bereits alle Ungleichungen* (I.) *folgen.*

2. *Es sei jetzt* $n>2$. Setzen wir einen Teil der Variabeln $x_1,\dots x_n$ Null und sind die noch übrigen dieser Variabeln $x_{h_1}, x_{h_2},\dots x_{h_m}$ $(h_1<h_2<\dots<h_m)$, so wird aus f eine Form $f\{x_{h_1}, x_{h_2},\dots x_{h_m}\}$ dieser m Variabeln, und die zu (I.)

entsprechenden Bedingungen für diese Form sind, wie man leicht erkennt, spezielle von den Bedingungen (I.) für die Form f selbst. Jede aus einer reduzierten Form f in solcher Weise abzuleitende Form von weniger als n Variabeln trägt also, von den Zusatzforderungen (II.) abgesehen, ebenfalls den Charakter einer reduzierten Form bei ihrer Variabelnzahl.

Greifen wir nun von den Ungleichungen (I.) für f *erstens* diejenigen heraus, welche gerade nach sich ziehen, daß *die sämtlichen binären Formen*

$$a_{hh}x_h^2 + 2a_{hk}x_hx_k + a_{kk}x_k^2 \qquad (h<k)$$

die Bedingungen (I.) *für reduzierte Formen* erfüllen, so handelt es sich um gewisse Ungleichungen in endlicher Anzahl und *kommen diese Ungleichungen auf die folgenden*

(13.) $$\pm 2a_{hk} \leqq a_{hh} \qquad (h<k)$$

und

(14.) $$0 \leqq a_{11} \leqq a_{22} \leqq \cdots \leqq a_{nn}$$

hinaus.

3. Wir nehmen nun an, *der zu beweisende Satz sei bereits für Formen von weniger als n Variabeln sichergestellt*, und wir können unter den Ungleichungen (I.) *zweitens* eine *endliche* Anzahl auswählen, welche zur Folge haben, daß *die sämtlichen aus f abgeleiteten Formen* $f\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n\}$ *für* $m = 1, 2, \ldots n-2$ *reduziert* sind.

Ist nun etwa

$$0 = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{mm}\ (1 \leqq m < n),\ 0 < a_{m+1,\,m+1},$$

so sind infolge von (13.) überhaupt *alle Koeffizienten* a_{hk} $(h \leqq k)$, *bei welchen der Index h einen der Werte* $1, 2, \ldots m$ *hat, Null* und wird aus f einfach $f\{x_{m+1}, \ldots x_n\}$. Die Ungleichungen (I.) in bezug auf letztere Form haben dann *bereits sämtliche Ungleichungen* (I.) *für f* zur Folge.

4. *Nunmehr setzen wir weiterhin* $a_{11} > 0$ *voraus.* Wir greifen *drittens* aus den Ungleichungen (I.) diejenigen in *endlicher* Anzahl vorhandenen heraus, welche zur Folge haben, daß auch *die sämtlichen aus f abzuleitenden Formen* $f\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ *für* $m = 2, 3, \ldots n-1$ *reduziert* sind.

5. Jetzt werden wir (in 5.—8.) zeigen, daß wir zu den bereits gewählten der Ungleichungen (I.) *viertens* eine weitere *endliche* Anzahl jener Ungleichungen derart hinzufügen können, *daß aus diesen für die Deter-*

minante D_n der Form f eine Ungleichung

$$(15.) \qquad D_n \geqq \lambda_n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

folgt, wo λ_n eine gewisse positive nur von n und nicht von den Koeffizienten der speziellen Form *f abhängende Konstante bedeutet.*

Nach 1. ist diese Tatsache bereits für $n=2$ mit dem Werte $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ zutreffend, und wir nehmen sie als *bereits erwiesen für Formen mit weniger als n Variabeln* an.

Es sei jetzt m einer der Werte $1, 2, \ldots n-1$, so haben wir unter Verwendung der in § 1 eingeführten Bezeichnungen für die Determinante der Form $f\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ die Ungleichung:

$$(16.) \qquad D\binom{1, 2, \ldots m}{1, 2, \ldots m} = D_m \geqq \lambda_m a_{11} a_{22} \cdots a_{mm} \qquad (m \leqq n-1)$$

und für die Determinante der Form $f\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n\}$:

$$(17.) \quad D\binom{m+1, m+2, \ldots n}{m+1, m+2, \ldots n} = \overline{D}_{n-m} \geqq \lambda_{n-m} a_{m+1, m+1} a_{m+2, m+2} \cdots a_{nn}.$$

In den Fällen $m=1$ und $m=n-1$ setzen wir $\lambda_1 = 1$.

Entwickeln wir nun den Ausdruck der Determinante D_n von f, so kommen darin $m!(n-m)!$ Terme vor, die sich zu dem Produkte $D_m \overline{D}_{n-m}$ zusammenfassen lassen, und weiter $n! - m!(n-m)!$ Glieder vom Typus

$$\pm a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{mk_m} a_{m+1, k_{m+1}} \cdots a_{nk_n},$$

wobei $k_1, k_2, \ldots k_m$ *nicht*, abgesehen von der Reihenfolge, mit $1, 2, \ldots m$ übereinstimmen und infolgedessen *auch noch unter den Indizes $k_{m+1}, \ldots k_n$ jedesmal wenigstens eine der Zahlen $1, 2, \ldots m$* sich findet. Nach den Beziehungen $a_{hk} = a_{kh}$ und den Ungleichungen (13.) erweist sich nun ein jedes solches Glied dem Betrage nach

$$\leqq \frac{1}{4} a_{11} a_{22} \cdots a_{mm} a_{mm} a_{m+2, m+2} \cdots a_{nn}.$$

Benutzen wir die Ungleichungen (16.) und (17.) und verstehen unter λ_n eine in der Folge noch zu fixierende positive Konstante, so entsteht jetzt

$$D - \lambda_n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \geqq \{(\lambda_m \lambda_{n-m} - \lambda_n) a_{m+1, m+1} - \frac{1}{4}(n! - m!(n-m)!) a_{mm}\} a_{11} a_{22} \cdots a_{mm} a_{m+2, m+2} \cdots a_{nn}.$$

Wir können

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{n-1}$$

voraussetzen. Die positive Größe λ_n denken wir uns zunächst irgendwie, jedoch kleiner als jedes der Produkte $\lambda_m \lambda_{n-m}$ für $m = 1, 2, \ldots n-1$ gewählt und setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{4} \frac{(n! - m!(n-m)!)}{\lambda_m \lambda_{n-m} - \lambda_n} = \varkappa_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots n-1).$$

Alsdann wird die Ungleichung (15.) mit dem betreffenden Werte λ_n jedenfalls *schon statthaben, wenn für wenigstens einen der Indizes* $m = 1, 2, \ldots n-1$ *sich*

$$a_{m+1, m+1} \geqq \varkappa_{m+1} a_{mm}$$

herausstellt.

6. Nunmehr haben wir uns nur noch mit der *Annahme* zu beschäftigen, *daß sämtliche Ungleichungen*

(18.) $$\varkappa_2 a_{11} > a_{22}, \quad \varkappa_3 a_{22} > a_{33}, \ldots \varkappa_n a_{n-1, n-1} > a_{nn}$$

gelten.

Aus den Ungleichungen (16.) geht unter Beachtung der Ungleichungen (14.) und von $a_{11} > 0$ hervor, daß sicherlich *die Determinanten*

$$D_1, D_2, \ldots D_{n-1}$$

positiv ausfallen *und daher auch*

$$q_1 = D_1, \quad q_2 = \frac{D_2}{D_1}, \ldots q_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}$$

sämtlich endlich und > 0 sind. Wir können daher, mag nun die Determinante $D_n > 0$ und damit auch f positiv sein oder nicht, *jedenfalls bereits für f die Darstellung* aus § 1:

(19.) $$f = q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2,$$

(20.) $$\zeta_1 = x_1 + \gamma_{12} x_2 + \cdots + \gamma_{1n} x_n, \quad \zeta_2 = x_2 + \cdots + \gamma_{2n} x_n, \ldots \zeta_n = x_n$$

mit

$$q_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}, \quad \gamma_{hk} = \frac{D\binom{1, \ldots h-1, h}{1, \ldots h-1, k}}{D_h} \qquad \binom{h = 1, \ldots n-1}{k = h+1, \ldots n}$$

ansetzen.

Die Determinante, welche den Zähler des vorstehenden Quotienten für γ_{hk} bildet, besteht aus $h!$ Gliedern, von denen ein jedes mit Rücksicht

auf die Ungleichungen (13.) sich dem Betrage nach $\leqq \frac{1}{2} a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}$ erweist, während der Nenner dieses Quotienten nach (16.) sich $\geqq \lambda_h a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}$ findet. Danach hat man

$$(21.) \qquad |\gamma_{hk}| \leqq \frac{1}{2} \frac{h!}{\lambda_h} \qquad \binom{h=1,\ldots n-1}{k=h+1,\ldots n}.$$

Aus (19.) und (20.) geht

$$q_1 = a_{11},\ q_2 \leqq a_{22}, \cdots q_{n-1} \leqq a_{n-1,n-1}$$

hervor, woraus mit Rücksicht auf (18.)

$$(22.) \qquad q_1 = a_{11},\ q_2 < \varkappa_2 a_{11}, \cdots q_{n-1} < \varkappa_2 \varkappa_3 \cdots \varkappa_{n-1} a_{11}$$

folgt.

7. Es kommt jetzt vor allem darauf an, zu erkennen, daß wir *von den Ungleichungen* (I.) *eine endliche Anzahl* herausgreifen können, *infolge deren sich auch* q_n *als* > 0 und damit also f als eine wesentlich positive Form *erweist.* Für diesen wichtigen Nachweis können wir uns des elementaren Prinzips bedienen, welches *Dirichlet* so meisterhaft in der Theorie der algebraischen Einheiten gehandhabt hat, *wonach bei Verteilung einer Anzahl von Größensystemen in eine kleinere Anzahl von Bereichen darunter irgendein Bereich da sein muß, der wenigstens zwei der Systeme auf einmal aufnimmt.*

Wir bilden zum Ausdrucke (19.) von f mit den nämlichen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ die *Hilfsform*

$$(23.) \qquad F = \zeta_1^2 + \varkappa_2 \zeta_2^2 + \cdots + \varkappa_2 \varkappa_3 \ldots \varkappa_{n-1} \zeta_{n-1}^2 + \mu \zeta_n^2,$$

wobei μ folgende Bedeutung haben soll. Es seien $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ beziehlich die *kleinsten ganzen* Zahlen, für welche

$$(24.) \qquad t_1^2 \geqq n,\ t_2^2 \geqq n\varkappa_2, \ldots t_{n-1}^2 \geqq n\varkappa_2 \varkappa_3 \cdots \varkappa_{n-1}$$

ausfällt, und es werde

$$(25.) \qquad \mu = \frac{1}{n t_1^2 t_2^2 \cdots t_{n-1}^2}$$

gesetzt.

Danach ist μ eine bestimmte positive Größe, mithin F eine *positive* Form der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Wir zeigen, *daß man für* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *ganze Zahlen, unter denen* $x_n \gtrless 0$ *ist, finden kann, so daß dafür* $F \leqq 1$ *ausfällt.*

In der Tat, zunächst ist $\zeta_n = x_n$. Wir setzen der Reihe nach $x_n = 0, 1, 2, \ldots t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$ und können zu jedem dieser Werte von x_n nach

einander $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots x_1$ als *ganze* Zahlen derart bestimmen, daß

$$(26.) \qquad 0 \leqq \zeta_{n-1} < 1,\ 0 \leqq \zeta_{n-2} < 1, \dots 0 \leqq \zeta_1 < 1$$

wird. Wir erhalten damit $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} + 1$ *in* x_n durchweg *verschiedene* Wertsysteme $x_1, x_2, \dots x_n$, welche sämtlich diese Bedingungen (26.) erfüllen.

Zerlegen wir nun für $h = n-1, n-2, \dots 1$ jedesmal das Intervall $0 \leqq \zeta_h < 1$ in die t_h Intervalle

$$0 \leqq \zeta_h < \frac{1}{t_h},\ \frac{1}{t_h} \leqq \zeta_h < \frac{2}{t_h}, \dots \frac{t_h - 1}{t_h} \leqq \zeta_h < 1,$$

so tritt eine Teilung des ganzen durch (26.) definierten Gebietes in $t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$ völlig unter einander getrennte Gebiete ein und wird man unter jenen Systemen $x_1, x_2, \dots x_n$, deren Anzahl $> t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$ ist, gewiß *irgend zwei*, etwa

$$x_1', x_2', \dots x_n';\ x_1'', x_2'', \dots x_n'' \qquad (x_n'' > x_n')$$

finden können, für welche $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{n-1}$ *demselben* Teilgebiete angehören.

Für das *durch Subtraktion aus beiden* hervorgehende System

$$x_1 = x_1'' - x_1',\ x_2 = x_2'' - x_2', \dots x_n = x_n'' - x_n'$$

gelten dann die Ungleichungen

$$(27.) \qquad |\zeta_1| < \frac{1}{t_1}, \dots |\zeta_{n-1}| < \frac{1}{t_{n-1}}, |\zeta_n| \leqq t_1 t_2 \cdots t_{n-1},$$

während zugleich $x_n > 0$ ist. Aus (27.), (24.) und (25.) ersieht man, daß infolgedessen weiter die $n-1$ ersten Terme des Ausdrucks F ein jeder $< \frac{1}{n}$, der n-te $\leqq \frac{1}{n}$ werden und also für das betreffende ganzzahlige Wertsystem $x_1, x_2, \dots x_n$ mit positivem x_n der ganze Ausdruck F gewiß < 1 ausfällt.

Das erhaltene System $x_1, x_2, \dots x_n$ befreien wir noch von einem in den Zahlen etwa vorhandenen gemeinsamen Teiler > 1, wobei die Ungleichung $F \leqq 1$ nicht verloren geht.

Andererseits können wir, *allein in Berücksichtigung* der Ausdrücke (20.) für $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ und *der Ungleichungen* (21.) *für die Koeffizienten* γ_{hk} *von vornherein eine endliche Anzahl* bestimmter *ganzzahliger Systeme* $x_1, x_2, \dots x_n$ *mit positivem* x_n *und ohne gemeinsamen Teiler* > 1 anweisen, welche überhaupt als *die einzigen derartigen Systeme* in Frage kommen, *die vielleicht den Ungleichungen* (27.) *genügen können.* Wir ermitteln die sämtlichen bezüglichen Systeme und wir heben nunmehr *viertens* unter den Ungleichungen (I.)

diejenigen heraus, welche ausdrücken, daß *für diese besonderen Systeme stets* $f(x_1, x_2, \dots x_n) \geqq a_{11}$ sein soll.

Alsdann muß infolge aller bereits herausgehobenen Ungleichungen (I.) *notwendig*

(28.) $$q_n \geqq \mu a_{11}$$

werden. Denn in dem Ausdrucke (19.) von f sind wegen (22.) die Koeffizienten von $\zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots \zeta_{n-1}^2$ durchweg nicht größer als in dem Multiplum $a_{11}F$ von F. Wäre nun $q_n < \mu a_{11}$, so würde daher bei von Null verschiedenem x_n stets $f < a_{11} F$ sein. Wir haben aber ein solches ganzzahliges System $x_1, x_2, \dots x_n$ mit von Null verschiedenem x_n, wofür $F \leqq 1$ ist, während wir für das betreffende System hier bereits einer der Ungleichungen (I.) gemäß $a_{11} \leqq f$ fordern, also ergäbe sich ein Widerspruch und folgt in der Tat die Ungleichung (28.).

8. Indem wir (28.) mit allen Ungleichungen (18.) multiplizieren, geht

$$q_n > \frac{\mu}{\varkappa_2 \varkappa_3 \cdots \varkappa_n} a_{nn}$$

hervor, und indem wir weiter diese Ungleichung mit der Ungleichung für D_{n-1} nach (16.) multiplizieren, folgt

$$D_n > \frac{\lambda_{n-1} \mu}{\varkappa_2 \varkappa_3 \cdots \varkappa_n} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Nach der Bedeutung von μ, die aus (24.) und (25.) ersichtlich ist, können wir nun über λ_n *definitiv* in solcher Art verfügen, daß *hieraus wieder die Ungleichung* (15.) *für* D_n hervorgeht. Wir brauchen dazu nur λ_n kleiner als die $n-1$ Größen $\lambda_m \lambda_{n-m} (m < n)$ derart zu wählen, daß

$$\lambda_{n-1} \geqq \lambda_n n \varkappa_2 \varkappa_3 \cdots \varkappa_n ([\sqrt{n}] + 1)^2 ([\sqrt{n\varkappa_2}] + 1)^2 \cdots ([\sqrt{n\varkappa_2 \cdots \varkappa_{n-1}}] + 1)^2$$

ist. Die Klammer [ ] soll hier das bekannte Zeichen für größte Ganze vorstellen. Dieser Forderung für λ_n aber können wir immer entsprechen, weil der Ausdruck rechts hier nach der Art, wie $\varkappa_2, \dots \varkappa_n$ von λ_n abhängen, gleichzeitig mit λ_n abnimmt und der Null zustrebt.

Bei dieser Bestimmungsweise von λ_n gilt nunmehr infolge der bisher herausgehobenen Ungleichungen (I.) *in allen Fällen die Ungleichung* (15.) *für* D_n.

9. Indem wir auf den Zähler einer Größe $q_h = D_h : D_{h-1}$ die Ungleichung (16.) bez. (15.), auf den Nenner die Ungleichung

$$D_{h-1} \leqq a_{11}\, a_{22} \cdots a_{h-1,\,h-1}$$

in Anwendung bringen, entsteht allgemein

$$q_h \geqq \lambda_h\, a_{hh} \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

und nun zeigt sich in der Tat leicht, daß eine endliche Anzahl unter den Ungleichungen (I.) angewiesen werden kann, welche alle übrigen dieser Ungleichungen zur Folge haben.

Wir setzen für jeden Wert $l = 1, 2, \ldots n$ *die folgenden Ungleichungen an:*

$$\text{(29.)} \qquad \lambda_n \zeta_n^2 < 1,\ \lambda_{n-1} \zeta_{n-1}^2 < 1, \ldots \lambda_l \zeta_l^2 < 1,$$

$$\text{(30.)} \qquad \lambda_{l-1} \zeta_{l-1}^2 < \frac{l-1}{4},\ \lambda_{l-2} \zeta_{l-2}^2 < \frac{l-2}{4}, \ldots \lambda_2 \zeta_2^2 < \frac{2}{4},\ \lambda_1 \zeta_1^2 \leqq \frac{1}{4}$$

mit den Ausdrücken

$$\text{(31.)} \qquad \zeta_1 = x_1 + \gamma_{12} x_2 + \cdots + \gamma_{1n} x_n,\ \zeta_2 = x_2 + \cdots + \gamma_{2n} x_n, \ldots \zeta_n = x_n$$

und den Einschränkungen

$$\text{(32.)} \qquad |\gamma_{hk}| \leqq \frac{1}{2} \frac{h!}{\lambda_h}.$$

Es ist einleuchtend, daß diesen Bedingungen jedesmal nur eine *endliche* Anzahl ganzzahliger Systeme $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsprechen können. *Unter diesen wählen wir alle Systeme* $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ *aus, in welchen* $s_l^{(l)}, s_{l+1}^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ *keinen gemeinsamen Teiler* > 1 *haben, und fordern jedesmal die Bedingung* (I.) *für die betreffenden Systeme.*

Die in solcher Weise bisher hervorgehobenen der Ungleichungen (I.) *ziehen dann notwendig die Gesamtheit dieser unendlich vielen Ungleichungen nach sich.*

In der Tat, es sei $x_1 = s_1^{(l)}, \ldots x_n = s_n^{(l)}$ ein ganzzahliges System, welches nicht zu den eben hervorgehobenen gehört und wobei $s_l^{(l)}, \ldots s_n^{(l)}$ keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben. Alsdann bestehen dafür insbesondere mit den zu f gehörigen Ausdrücken $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *nicht alle* Ungleichungen (29.), (30.).

Wir nehmen *erstens* an, es sei dafür etwa $\lambda_h \zeta_h^2 \geqq 1$ und $h \geqq l$. Dann folgt aus

$$f = q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2$$

mit Rücksicht auf $q_h \geqq \lambda_h a_{hh}$ und $a_{hh} \geqq a_{ll}$ sofort $f \geqq a_{ll}$.

Es seien *zweitens* für das bezügliche System in f sämtliche Ungleichungen (29.) erfüllt, und es sei $h (< l)$ der *größte* Index, für den statt der in (30.) genannten Ungleichung vielmehr sich die Ungleichung

$\lambda_h \zeta_h^2 \geqq \frac{1}{4} h$ bezw. $\zeta_1^2 > \frac{1}{4}$, je nachdem $h > 1$ oder $= 1$ ist, einstellt. Dann haben wir wegen $q_h \geqq \lambda_h a_{hh}$ für das betreffende System $x_1, \dots x_n$ jedenfalls

$$(33.) \qquad f(x_1, \dots x_n) \geqq \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{hh}) + q_{h+1}\zeta_{h+1}^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2.$$

Wir denken uns nun die Zahlen $x_{h+1}, \dots x_n$ festgehalten, statt der Zahlen $x_h, x_{h-1}, \dots x_1$ aber, was offenbar möglich ist, nach einander solche ganze Zahlen $x_h^*, x_{h-1}^*, \dots x_1^*$ gewählt, daß die neuen dazugehörigen Ausdrücke (31.) die Bedingungen

$$(34.) \qquad -\frac{1}{2} \leqq \zeta_h^* \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq \zeta_{h-1}^* \leqq \frac{1}{2}, \dots -\frac{1}{2} \leqq \zeta_1^* \leqq \frac{1}{2}$$

erfüllen. Wir haben damit ein modifiziertes ganzzahliges System $x_1^*, \dots x_n^*$ erhalten, in welchem $x_l^* = x_l, \dots x_n^* = x_n$ keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben, und welches nunmehr *allen* Bedingungen (29.), (30.) genügt, für das wir also bereits $f \geqq a_{ll}$ voraussetzen. Jetzt folgt aus (33.) und (34.), da stets $a_{kk} \geqq q_k$ ist,

$$f(x_1, \dots x_n) \geqq f(x_1^*, \dots x_n^*) \geqq a_{ll}.$$

10. Wir können unser Endergebnis folgendermaßen aussprechen:

Der reduzierte Raum B ist ein konvexer Kegel mit der Spitze im Nullpunkte $f = 0$, der von einer endlichen Anzahl durch diesen Punkt laufender Ebenen begrenzt wird.

§ 6. *Die Kanten des reduzierten Raumes.*

1. Im ganzen reduzierten Raume B gilt $a_{11} \geqq 0$; *die Punkte* darin, *für welche $a_{11} > 0$ ist, entsprechen positiven Formen; die Punkte* darin, *für welche $a_{11} = 0$ ist,* erfüllen zugleich die Bedingungen $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0, \dots a_{1n} = 0$ und *bilden eine nur $\frac{n(n-1)}{2}$-fache Mannigfaltigkeit auf der Begrenzung von B.*

Die zur Charakterisierung des reduzierten Raumes dienenden Ungleichungen haben eine jede die Gestalt

$$(\text{I, II.}) \qquad \Sigma m_{hk} a_{hk} \geqq 0,$$

worin die m_{hk} gewisse gegebene numerische Koeffizienten vorstellen. Daraus geht hervor:

Ist f eine reduzierte Form, so ist auch jedes Produkt cf, wo c einen

positiven Faktor vorstellt, sind f und g zwei reduzierte Formen, so ist auch jede Verbindung $(1-t)f+tg$, wo $0<t<1$ ist, eine reduzierte Form.

2. Die allgemeinen Prinzipien über lineare Ungleichungen, welche ich in meiner *„Geometrie der Zahlen“* § 19 dargelegt habe, ergeben folgende Aufschlüsse über die zur Definition des Raumes B *wirklich notwendigen* von den sämtlichen Ungleichungen (I.) und (II.).

Wir wollen eine nicht identisch verschwindende reduzierte Form φ eine *Kantenform* des reduzierten Raumes nennen, *wenn es nicht möglich ist, φ als Summe zweier reduzierten Formen darzustellen*, die weder identisch verschwinden, noch positive Vielfache von einander sind.

Eine Kantenform ist vollständig zu charakterisieren als eine reduzierte Form, für welche unter den Ungleichungen (I, II.) *irgend* $\frac{n(n+1)}{2}-1$ *solche, deren linke Seiten linear unabhängige Funktionen der* a_{hk} *sind, mit dem Zeichen* $=$ *erfüllt sind.*

Gelten uns die Formen, die Vielfache von einander sind, als *nicht wesentlich verschieden*, so gibt es *nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Kantenformen.* Die Strahlen vom Nullpunkte nach ihnen bilden die *Kanten* des reduzierten Raumes.

Von den Ungleichungen (I, II.) *ist zur Definition des reduzierten Raumes nur jede solche wesentlich, die mit dem Zeichen* $=$ *eine Ebene liefert, welche* $\frac{n(n+1)}{2}-1$ *unabhängige Kanten des reduzierten Raumes aufnimmt,* **d. h. solche $\frac{n(n+1)}{2}-1$ Kanten, durch die sich nur eine einzige Ebene legen läßt.** *Die so charakterisierten Ungleichungen bestimmen die Wände des reduzierten Raumes. Alle übrigen Ungleichungen* (I, II.) *können bei der Definition des reduzierten Raumes* **als aus diesen Ungleichungen folgend** *fortgelassen werden.*

3. Wir greifen *auf jeder Kante* **des reduzierten Raumes** *eine Form* **heraus,** *etwa diejenige, für welche der erste von Null verschiedene unter den Koeffizienten* $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ *den Wert* 1 *hat.* **Wir erhalten auf diese Weise eine endliche Anzahl völlig bestimmter Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$. Indem der reduzierte Raum ein konvexer Kegel vom Nullpunkte aus ist, besteht alsdann der Satz:**

Jede reduzierte Form f läßt sich **(auf eine oder auf unendlich viele Weisen)** *in die Gestalt*

$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_r\varphi_r \tag{35.}$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2, \dots c_r$, die sämtlich $\geqq 0$ sind, setzen, und umgekehrt ist jede Form, die sich in dieser Weise darstellen läßt, eine reduzierte.

§ 7. *Die Nachbarkammern des reduzierten Raumes.*

Wir beweisen in betreff der reduzierten Formen noch den Satz:

Die ganzzahligen Substitutionen von der Determinante ± 1, *welche fähig sind, positive reduzierte Formen wieder in reduzierte Formen überzuführen, existieren nur in endlicher Anzahl.*

Wir können diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen:

Im Gebiete der positiven Formen grenzt der reduzierte Raum nur an eine endliche Anzahl von den äquivalenten Kammern an.

1. Es sei S:

$$x_h = s_{h1}\, y_1 + s_{h2}\, y_2 + \cdots + s_{hn}\, y_n \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

eine unimodulare ganzzahlige Substitution, welche

$$f = \Sigma a_{hk}\, x_h x_k \text{ in } g = \Sigma b_{hk}\, x_h x_k$$

überführt, wobei beide Formen reduziert sind und $a_{11} > 0$ **ist.**

Wir haben dabei

$$(36.) \qquad f(s_{1k}, s_{2k}, \dots s_{nk}) = b_{kk} \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Ist die *letzte* **der Zahlen** $s_{1k}, s_{2k}, \dots s_{nk}$, **die** *von Null verschieden* **ist,** s_{hk}, **so ergibt sich, da ihr absoluter Betrag mindestens 1 sein muß, bei Gebrauch der früheren Bezeichnungen** q_h **in bezug auf** f:

$$b_{kk} \geqq q_h \geqq \lambda_h a_{hh} \geqq \lambda_n a_{hh}.$$

2. Daraus schließen wir zunächst, daß *für jeden Index* l *durchaus*

$$b_{ll} \geqq \lambda_n a_{ll} \qquad (l = 1, 2, \dots n)$$

sein muß.*)

Denn hätte man für einen Index l:

$$b_{ll} < \lambda_n a_{ll},$$

so würde daraus weiter

---

*) Eine ähnliche Überlegung findet sich bei *C. Jordan*, Journ. de l'École polyt. t. XXIX, cahier 48, p. 127.

$$b_{11} \leqq b_{22} \leqq \cdots \leqq b_{ll} < \lambda_n a_{ll} \leqq \lambda_n a_{l+1,\,l+1} \leqq \cdots \leqq \lambda_n a_{nn}$$

hervorgehen und daher könnte keine Größe

$$s_{hk} \ (h = l, l+1, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots l)$$

in ihrer, der k-ten Vertikalreihe die letzte von Null verschiedene Zahl sein, d. h. diese Größen müßten *sämtlich Null* sein. Sie bilden aber in der Determinante der Substitution S die Elemente, die gleichzeitig in bestimmten l Vertikal- und $n-l+1$ Horizontalreihen vorkommen, also wäre diese Determinante Null, während sie ± 1 sein sollte.

Ganz entsprechend wird, weil auch g durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution in f übergeht, *stets*

(37.) $$a_{kk} \geqq \lambda_n b_{kk} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

sein.

3. Wir nehmen nun erstens an, *für jeden Index* $k = 1, 2, \ldots n-1$ fände sich *stets*

(38.) $$b_{kk} \geqq \lambda_n a_{k+1,\,k+1},$$

so folgt daraus vermöge (37.) allgemein

$$a_{kk} \geqq \lambda_n^2 a_{k+1,\,k+1}$$

und weiter

$$a_{11} \geqq \lambda_n^{2k-2} a_{kk} \geqq \lambda_n^{2k-1} b_{kk} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Die zu den Zahlen $x_1 = s_{1k}, \ldots x_n = s_{nk}$ gehörenden Werte von $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ erfüllen dann nach (36.) und da allgemein $q_h \geqq \lambda_n a_{hh} \geqq \lambda_n a_{11}$ ist, die Ungleichung

$$\lambda_n^{2k} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_n^2) \leqq 1,$$

und hieraus ist zu ersehen, daß für jede Vertikalreihe $s_{1k}, \ldots s_{nk}$ von S nur eine *endliche* Anzahl ganzzahliger Systeme in Betracht kommen.

4. Ist die Annahme (38.) nicht immer zutreffend, so sei l *der größte Index, wofür*

(39.) $$b_{l-1,\,l-1} < \lambda_n a_{ll} \qquad (l \geqq 2)$$

ist. Wir haben dann nach einander *viererlei* Umstände in Betracht zu ziehen.

Erstens zeigt eine ähnliche Überlegung wie in 2., daß jedenfalls *alle Koeffizienten*

$$s_{hk} \ (h = l, l+1, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots l-1)$$

Null sind. Die Substitution S kann also geschrieben werden:

$$x_h = s_{h1}y_1 + \cdots + s_{h,l-1}y_{l-1} + s_{hl}y_l + \cdots + s_{hn}y_n \qquad (h < l),$$
$$x_h = \qquad\qquad\qquad\qquad s_{hl}y_l + \cdots + s_{hn}y_n \qquad (h \geqq l).$$

Jetzt ist

$$x_h = s_{h1}y_1 + \cdots + s_{h,l-1}y_{l-1} \qquad (h=1,2,\ldots l-1)$$

eine unimodulare ganzzahlige Substitution von $l-1$ Variabeln, und durch sie geht die positive Form

$$f(x_1, \ldots x_{l-1}, 0, \ldots 0) \text{ in } g(y_1, \ldots y_{l-1}, 0, \ldots 0)$$

über, wobei beide Formen reduzierte von $l-1$ Variabeln sind. Nehmen wir den zu beweisenden Satz, der für Formen von einer Variable evident ist, als bereits bewiesen für Formen mit weniger als n Variabeln an, so kommen danach *zweitens für die Koeffizienten*

$$s_{hk}\,(h = 1, 2, \ldots l-1;\ k = 1, 2, \ldots l-1)$$

nur eine endliche Anzahl von Systemen in Betracht.

Unsere Annahme über die Zahl l schließt in sich, daß, falls $l < n$ ist, die Beziehungen

$$b_{kk} \geqq \lambda_n a_{k+1,k+1} \qquad (k = l, l+1, \ldots n-1)$$

gelten, woraus wir vermöge (37.) weiter

$$a_{kk} \geqq \lambda_n^2 a_{k+1,k+1} \qquad (k = l, l+1, \ldots n-1)$$

und sodann

$$a_{ll} \geqq \lambda_n^{2k-2l} a_{kk} \geqq \lambda_n^{2k-2l+1} b_{kk} \qquad (k = l, l+1, \ldots n-1, n)$$

entnehmen; letztere Beziehung besteht auch für $l = n$, $k = n$.

Die Gleichung (36.) für b_{kk} liefert daraufhin für die zu s_{lk}, $s_{l+1,k}, \ldots s_{nk}$ gehörenden Werte $\zeta_l, \zeta_{l+1}, \ldots \zeta_n$ die Relation

$$\lambda_n^{2k-2l+2}(\zeta_l^2 + \zeta_{l+1}^2 + \cdots + \zeta_n^2) \leqq 1.$$

Hieraus ist *drittens* zu ersehen, daß *für die Zahlen*

$$s_{hk}\,(h = l, l+1, \ldots n;\ k = l, l+1, \ldots n)$$

nur eine endliche Anzahl von Systemen in Betracht kommen.

Endlich muß g als reduzierte Form insbesondere allen Ungleichungen

$$g(y_1, \ldots y_{l-1}, e_l^{(k)}, \ldots e_n^{(k)}) \geqq b_{kk} \qquad (k = l, l+1, \ldots n)$$

genügen, in welchen $e_k^{(k)} = 1$, die anderen Zahlen $e_h^{(k)} = 0$ und $y_1, \dots y_{l-1}$ beliebige ganze Zahlen sind. Diese Ungleichungen kommen nach der bereits festgestellten besonderen Gestalt der Substitution S auf die sämtlichen Ungleichungen

$$f(x_1, \dots x_{l-1}, s_{lk}, \dots s_{nk}) \geqq f(s_{1k}, \dots s_{l-1,k}, s_{lk}, \dots s_{nk}) \qquad (k = l, l+1, \dots n)$$

für beliebige ganze Zahlen $x_1, \dots x_{l-1}$ hinaus.

Eine ähnliche Überlegung, wie sie am Schlusse von § 5 zur Anwendung kam, ergibt nun, daß hiernach die zu $s_{1k}, \dots s_{nk}\ (k \geqq l)$ gehörenden Verbindungen $\zeta_{l-1}, \dots \zeta_1$ jedenfalls die Bedingungen

$$\frac{1}{4}(q_1 + \dots + q_h) \geqq q_1 \zeta_1^2 + \dots + q_h \zeta_h^2 \qquad (h = l-1, \dots 1)$$

und umsomehr die Bedingungen

$$\lambda_n \zeta_{l-1}^2 \leqq \frac{l-1}{4}, \dots \lambda_n \zeta_1^2 \leqq \frac{1}{4}$$

erfüllen, und hiernach kommen *viertens* auch *für die Zahlen*

$$s_{hk}\ (h = 1, 2, \dots l-1;\ k = l, l+1, \dots n)$$

nur eine endliche Anzahl von Systemen in Betracht.

Damit ist der zu führende Nachweis in allen Punkten erbracht.

§ 8. *Die Determinantenfläche.*

Der Raum der positiven Formen wird von der *Flächenschar* $D(f) = \text{const.}$ durchzogen, deren einzelne Flächen jedesmal alle Formen f zu einem und dem nämlichen positiven Determinantenwert aufnehmen. Alle Flächen dieser Schar sind unter einander ähnlich und ähnlich gelegen vom Nullpunkte aus, sodaß es für die meisten Zwecke genügt, von ihnen etwa die eine Fläche $D(f) = 1$ in Betracht zu ziehen.

Wir beweisen hier folgenden Satz:

Sind f und g zwei verschiedene positive Formen von der Determinante 1 *und ist t ein beliebiger Wert* > 0 *und* < 1, *so hat die gleichfalls positive Form* $(1-t)f + tg$ *stets eine Determinante* > 1.

Wir können bekanntlich (sowie von den Formen f und g auch nur eine positiv ist) immer eine *lineare Transformation* von der Determinante 1 *mit*

lauter reellen Koeffizienten **finden,** *wodurch f und g gleichzeitig in Aggregate*

$$\alpha_1 z_1^2+\alpha_2 z_2^2+\cdots+\alpha_n z_n^2,\ \beta_1 z_1^2+\beta_2 z_2^2+\cdots+\beta_n z_n^2$$

übergehen, **welche nur die Quadrate der neuen Variabeln enthalten. Die Determinante der Verbindung $(1-t)f+tg$ gewinnt dann allgemein den Produktausdruck**

$$\Delta(t)=(\alpha_1+t(\beta_1-\alpha_1))\,(\alpha_2+t(\beta_2-\alpha_2))\cdots(\alpha_n+t(\beta_n-\alpha_n)),$$

und nach Voraussetzung ist

$$\Delta(0)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=1,\quad \Delta(1)=\beta_1\beta_2\cdots\beta_n=1.$$

Nun erhalten wir

$$\frac{d^2\log\Delta(t)}{dt^2}=-\left(\frac{\beta_1-\alpha_1}{\alpha_1+t(\beta_1-\alpha_1)}\right)^2-\cdots-\left(\frac{\beta_n-\alpha_n}{\alpha_n+t(\beta_n-\alpha_n)}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck fällt danach im ganzen Intervalle $0\leqq t\leqq 1$ stets <0 aus, d. h. *die Kurve $u=\log\Delta(t)$ in einer t,u-Ebene ist im Bereich $0\leqq t\leqq 1$ stets konvex von der t-Achse fort.* **Mithin ist diese Funktion u, da sie an den zwei Endpunkten des Intervalls $=0$ ist, im Innern desselben durchweg >0, also ist hier stets $\Delta(t)>1$, was zu zeigen war.**

Setzen wir

$$c(1-t)\alpha_h=a_h,\ ct\beta_h=b_h \qquad (h=1,2,\ldots n),$$

wo c ein positiver Faktor sei, so kommt die in betreff des Ausdrucks $\Delta(t)$ bewiesene Ungleichung auf den Satz hinaus:

Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ und $b_1, b_2, \ldots b_n$ lauter positive Größen, ohne daß man gerade $a_1:a_2:\ldots:a_n=b_1:b_2:\ldots:b_n$ hat, so gilt stets die Beziehung

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\,(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}>\sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\,b_2\ldots b_n}.$$

Das über die Fläche $D(f)=1$ gefundene Resultat können wir auch folgendermaßen ausdrücken:

Konstruiert man in irgend einem Punkte der Determinantenfläche $D(f)=1$, welcher einer positiven Form f entspricht, die Tangentialebene an diese Fläche, so liegt im ganzen Bereiche der positiven Formen diese Fläche, abgesehen vom Berührungspunkte, vollständig auf der dem Nullpunkte abgewandten Seite der Ebene.

Indem wir diese Lage der Tangentialebene an $D(f)=$ const. durch einen Punkt f in bezug auf irgend einen zweiten Punkt g der Fläche in

eine Formel fassen, kommen wir auf Grund der schon oben verwandten gleichzeitigen Transformation von f und g in Aggregate von Quadraten zu

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)>\sqrt[n]{\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}, \tag{40.}$$

d. i. einfach zu der bekannten *Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven*, nicht lauter gleichen *Größen*.

Kürzer können wir den Charakter der Fläche $D(f)=1$ noch dahin schildern:

Die Determinantenfläche $D(f)=1$ ist im Gebiete der positiven Formen überall konvex nach dem Nullpunkte zu.

§ 9. *Das Problem der dichtesten gitterförmigen Lagerung von Kugeln.*

1. Für den Koeffizienten a_{11} einer positiven reduzierten Form f haben wir stets

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)\geqq a_{11},$$

wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler >1 sind, und diese Ungleichung überträgt sich sofort auf beliebige Systeme von ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nur nicht sämtlich Null sind. Danach ist a_{11} *die kleinste durch die Form f mittels ganzer, nicht sämtlich verschwindender Zahlen darstellbare Größe.* Wir nennen diese Größe das *Minimum der Form f* und schreiben sie $M(f)$; sie ist (wie die ganze reduzierte Form) offenbar eine *Invariante der Klasse f.*

2. Aus den Ungleichungen (14.) und (15.) in § 5 (nach der Größenfolge von $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ und der oberen Begrenzung ihres Produktes mit Rücksicht auf die Determinante) entnehmen wir

$$D(f)\geqq \lambda_n (M(f))^n. \tag{41.}$$

Danach überschreitet $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ *niemals eine gewisse nur von n abhängende Grenze.*

Es ist nun durch *Hermite* die Frage nach dem *präzisen Maximum* der Werte dieses Quotienten gestellt worden.

Korkine und *Zolotareff**) definierten:

*) Mathem. Ann. Bd. 6 und Bd. 11.

Eine positive quadratische Form f mit n Variabeln soll eine extreme Form (ihre Klasse eine extreme Klasse) heißen, wenn bei den infinitesimalen Variationen der Form der Quotient $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$ niemals zunimmt.

Da wir bei den Variationen durch bloße Multiplikation der variierten Form mit passendem Faktor den Wert des Minimums konstant erhalten können, so dürfen wir auch sagen:

Eine positive Form ist extrem, wenn bei keiner infinitesimalen Variation der Form, welche das Minimum ungeändert läßt, die Determinante abnehmen kann.

3. Den extremen Formenklassen kommt eine *bemerkenswerte geometrische Bedeutung* **zu.**

Bringen wir eine positive quadratische Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ **auf die Gestalt**

$$f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

so daß $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ n **reelle lineare Formen in** $x_1, x_2, \dots x_n$ **sind, und deuten** $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ **als rechtwinklige Koordinaten in einem Raume** $\mathfrak{R}_n$ **von** n **Dimensionen, so können wir** $f \leqq 1$ **als eine** n**-dimensionale** *Kugel* **vom Radius 1 in diesem Raume bezeichnen. Ihr Volumen in** $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ **ist**

$$\gamma_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Die Punkte $x_1 = m_1, x_2 = m_2, \dots x_n = m_n$, **welche ganzzahligen Werten** $m_1, m_2, \dots m_n$ **entsprechen, bilden in dem Raume** $\mathfrak{R}_n$ **ein** *parallelepipedisches Punktsystem (Gitter)* **mit der** *Dichtigkeit* $\frac{1}{\sqrt{D(f)}}$. **Nämlich** *die einzelnen Parallelepipede*

$$m_h - \frac{1}{2} \leqq x_h \leqq m_h + \frac{1}{2} \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

mit diesen Punkten als Mittelpunkten *erfüllen* **in ihrer Gesamtheit** *den Raum* $\mathfrak{R}_n$ *lückenlos*, **sind unter einander kongruent** *und enthalten jedesmal je einen Gitterpunkt bei einem Volumen je* $= \sqrt{D(f)}$.

Die n-dimensionalen Kugeln vom Radius $\frac{1}{2}\sqrt{M(f)}$ *um diese einzelnen Gitterpunkte werden* **nun, nach der Bedeutung von** $M(f)$, *derart liegen, daß sie unter einander nur in Punkten der Begrenzung zusammenstoßen.* **Infolgedessen wird insbesondere**

(42.) $$\gamma_n\left(\frac{1}{2}\sqrt[n]{M(f)}\right)^n < \sqrt{D(f)}$$

gelten, eine Ungleichung, die den Charakter der Ungleichung (41.) trägt, aber jener vorzuziehen sein wird, wie λ_n in § 5 festgesetzt wurde.

Halten wir nun die Bedeutung der Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ in $\mathfrak{R}_n$ fest und variieren die Koeffizienten von f derart, daß $M(f)$ *unverändert* bleibt, so bleiben diese Kugeln hier in ihrer Größe sowie in dem Charakter, nicht in einander einzudringen, erhalten, es ändert sich nur das parallelepipedische Gitter ihrer Mittelpunkte.

Die Frage nach dem Maximum von $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$ oder *den extremen Formenklassen ist* danach, geometrisch gefaßt, *gleichbedeutend mit der Frage nach den dichtesten gitterförmigen Lagerungen von lauter gleichen Kugeln im Raume von n Dimensionen.*

§ 10. *Bestimmung der extremen Formenklassen.*

Eine Reihe interessanter Eigenschaften der extremen Klassen haben bereits *Korkine* und *Zolotareff* nachgewiesen. Auf Grund der hier entwickelten Reduktionsmethode der positiven Formen läßt sich die Theorie der extremen Formen in sehr befriedigender Weise zum Abschluß bringen.

1. Ich bezeichne eine reduzierte Form als eine *extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum*, wenn bei allen denjenigen infinitesimalen Variationen der Form, *wobei die Form im reduzierten Raume verbleibt*, der Quotient $\frac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ niemals zunimmt.

2. Ist f eine positive Form und legen wir an die durch f laufende Determinantenfläche $D(f) = \text{const.}$ im Punkte f die Tangentialebene, so läßt nach dem Satze in § 8 diese Ebene die Fläche im Gebiete der positiven Formen (und vom Punkte f selbst abgesehen) ganz auf der dem Nullpunkte abgewandten Seite liegen. *Also nimmt in dieser Tangentialebene beim Fortgang vom Punkte f aus die Determinante stets ab.*

3. Wenn nun f *reduziert* ist, *aber nicht* gerade *eine Kantenform* des reduzierten Raumes vorstellt, so können wir f als Summe zweier positiven reduzierten Formen φ, ψ darstellen, die nicht Vielfache von einander sind. Es seien dann φ^*, ψ^* diejenigen Vielfachen von φ, ψ, welche in die genannte Tangentialebene fallen, so liegt f *innerhalb* der geradlinigen Strecke von

φ^* nach ψ^*. Nun *wächst entweder* beim Fortgang von f aus *nach einer Seite dieser Strecke hin der Koeffizient* a_{11}, *oder er ist auf dieser ganzen Strecke konstant*, also wäre es immer möglich, f so zu variieren, daß $D(f)$ abnimmt und gleichzeitig $M(f)$ nicht abnimmt, mithin $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$ wächst, und f wäre jedenfalls keine extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum.

Wir erhalten demnach das Resultat:

Eine extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum kann nur eine Kantenform in diesem Raume sein.

4. Jetzt sei $f=(a_{hk})$ eine positive Kantenform des reduzierten Raumes und extrem in bezug auf diesen Raum, und wir legen wieder die Determinantenfläche durch f und daran die Tangentialebene im Punkte f. Ist $g=(b_{hk})$ eine beliebige *andere positive Kantenform* dieses Raumes und cg dasjenige Multiplum von g, welches in jene Tangentialebene fällt, so darf beim Fortgang auf der geradlinigen Strecke von f nach cg hin das Minimum weder zunehmen noch konstant bleiben, d. h. während

$$c\sum\frac{\partial D(f)}{\partial a_{hk}}b_{hk}=nD(f)$$

ist, muß gleichzeitig $cb_{11}<M(f)=a_{11}$ sein, oder also *es muß*

$$\frac{1}{nD(f)}\sum\frac{\partial D(f)}{\partial a_{hk}}b_{hk}>\frac{b_{11}}{a_{11}} \tag{43.}$$

sein.

5. *Erfüllt* andererseits *eine positive Kantenform f des reduzierten Raumes in bezug auf jede andere positive Kantenform g dieses Raumes die vorstehende Bedingung* (43.), *so ist in der Tat f eine extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum.*

Denn für jede nicht wesentlich positive Kantenform g des reduzierten Raumes gilt diese Ungleichung (43.) ohne weiteres (vergl. die Ungleichung (40.)); für f selbst an Stelle von g gilt die aus (43.) durch Änderung des Zeichens $>$ in $=$ hervorgehende Beziehung; und nach der in (35.) gefundenen Darstellung jeder beliebigen reduzierten Form als Aggregat $\sum cg$ aus Kantenformen würde dann diese Ungleichung (43.) überhaupt für jede beliebige reduzierte Form g hervorgehen, die nicht ein bloßes Vielfaches von f ist.

In dieser Allgemeinheit aber besagt die Ungleichung (43.) in der Tat, daß bei jeder infinitesimalen Variation von f, wobei die variierte Form im reduzierten Raume verbleibt und auch nicht bloß auf dem Strahle vom Nullpunkte aus durch f sich bewegt, die Größe $\frac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ stets abnimmt.

6. *Soll nun eine Klasse f eine extreme sein, so ist jedenfalls notwendig, daß jede einzelne in der Klasse vorhandene reduzierte Form eine extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum ist.* Es gilt aber auch die Umkehrung hiervon und erlangen wir damit folgendes Charakteristikum der extremen Klassen:

Eine positive Formenklasse f ist nur dann und immer dann eine extreme Klasse, wenn jede einzelne reduzierte Form der Klasse eine extreme Form in bezug auf den reduzierten Raum ist.

In der Tat, es sei für die Klasse einer positiven Form $f=\Sigma a_{hk}x_hx_k$ die hier genannte Bedingung erfüllt. Wir bestimmen *jede existierende unimodulare ganzzahlige Substitution S, welche f in eine reduzierte Form überführt.* Wir bestimmen weiter jedesmal für die sich durch die Substitution S ergebende reduzierte Form $g=\Sigma b_{hk}y_hy_k$ eine positive Größe ε_S folgender Art: Das Gebiet aller Formen $g^*=\Sigma(b_{hk}+\varepsilon_{hk})y_hy_k$, für welche alle Beträge $|\varepsilon_{hk}|<\varepsilon_S$ sind, soll, soweit es in den reduzierten Raum hineinfällt, dort nur solche Seitenwände dieses Raumes treffen, die auch g enthalten, und, außer auf der Kante vom Nullpunkte durch g, überall kleinere Werte der Funktion $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$ als im Punkte g darbieten.

Wir ermitteln endlich eine positive Größe δ derart, daß alle Formen $\Sigma\delta_{hk}x_hx_k$, wobei die Beträge $|\delta_{hk}|<\delta$ sind, durch die Substitutionen S nur in solche Formen $\Sigma\varepsilon_{hk}y_hy_k$ übergehen, in denen dann die Beträge $|\varepsilon_{hk}|<\varepsilon_S$ sind.

Alsdann kann der ganze Bereich der durch $f^*=\Sigma(a_{hk}+\delta_{hk})x_hx_k$ mit den Bedingungen $|\delta_{hk}|<\delta$ dargestellten Formen in den einzelnen, mit dem reduzierten Raume B äquivalenten Kammern $B_{S^{-1}}$, denen f angehört, immer nur solche Wände treffen, die auch f enthalten, und kann daher nicht aus diesen Kammern $B_{S^{-1}}$ heraustreten. Es gibt daher zu jeder solchen Form f^* wenigstens eine von den Substitutionen S, welche sie gleichzeitig mit f in eine reduzierte Form überführt, und danach wird in diesem ganzen Bereiche, außer auf dem vom Nullpunkte aus durch f gehenden Strahl, die Funktion $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$ stets kleiner als in f sein.

7. Diejenigen positiven Kantenformen auf der Fläche $D(f)=1$, welche den allergrößten Wert von a_{11} haben, repräsentieren notwendig extreme Klassen und bestimmen die *präzise obere Grenze aller Werte von* $M(f):\sqrt[n]{D(f)}$.

§ 11. *Die binären, ternären, quaternären Formen.*

Auf Grund der Ergebnisse des § 5 und § 6 können wir für jeden Wert n die Seitenwände und die Kanten des reduzierten Raumes angeben und können wir nunmehr auch alle extremen Formenklassen ermitteln.

1. Man findet beispielsweise, *daß in den Fällen* $n=2,3,4$ *bereits diejenigen Ungleichungen*

$$f(s_1, s_2, \dots s_n) \geqq a_{ll} \qquad (l=1,2 \dots n),$$

worin $s_l=1$ *und die übrigen Zahlen* $s_h=\pm 1$ *oder zum Teil* $=0$ *sind, alle übrigen der Ungleichungen* (I.) *nach sich ziehen.*

Nämlich aus diesen besonderen Ungleichungen läßt sich dann bereits *allgemein*

$$f(m_1, m_2, \dots m_n) \geqq a_{ll}$$

für jedes beliebige System von ganzen Zahlen $m_1, m_2, \dots m_n$, *wobei* $m_l, m_{l+1}, \dots m_n$ *nicht sämtlich Null sind,* erschließen.

Da wir uns vorbehalten können, von den Substitutionen

$$x_1=\pm y_1,\ x_2=\pm y_2, \dots x_n=\pm y_n$$

Gebrauch zu machen, genügt es, die hiermit behauptete Tatsache für den Fall einzusehen, daß $m_1, m_2, \dots m_n$ sämtlich $\geqq 0$ sind. Andererseits dürfen wir bei dem Nachweis dieser engeren Tatsache die entsprechenden Ungleichungen für die kleineren Werte des n bereits als sichergestellt annehmen, sodaß wir überhaupt nur noch Werte $m_1, m_2, \dots m_n$, die sämtlich >0 sind, und dabei den Index $l=n$ in Betracht zu ziehen brauchen.

Unter den positiven Werten $m_1, m_2, \dots m_n$ sei m_j der *letzte von kleinstem Betrage*. Wir setzen $u_h=m_j$, wenn $h \geqq j$ ist, und $u_j=0$, dabei wird immer

$$m_h-u_h \geqq 0, \quad m_n-u_n>0$$

sein, und die n Argumente m_h-u_h erscheinen gegenüber den Argumenten m_h verringert bis auf eines, das unverändert geblieben ist. Nun haben wir:

$$f(m_1, m_2, \dots m_n) - f(m_1 - u_1, m_2 - u_2, \dots m_n - u_n)$$
$$= m^2(f(1, 1, \dots 1) - a_{jj}) + 2 \sum_{h \gtrless j} (m_h - m_j) m_j \sum_{k \gtrless j} a_{hk},$$

und die rechte Seite hier erweist sich durch $f(1, 1, \dots 1) \geqq a_{jj}$ und durch die Ungleichungen $a_{hh} + 2a_{hk} \geqq 0$ in Anbetracht von $n \leqq 4$ als $\geqq 0$, sodaß

$$f(m_1, m_2, \dots m_n) \geqq f(m_1 - u_1, m_2 - u_2, \dots m_n - u_n)$$

folgt. Damit ist hier eine Rekursionsformel gewonnen, die durch einen Induktionsschluß sofort den verlangten Beweis liefert.

2. Stellen wir eine Form f durch das quadratische Schema ihrer Koeffizienten dar, *so sind in den Fällen* $n = 2, 3, 4$ *die positiven Kantenformen mit* $M(f) = 2$:

$$\begin{vmatrix} 2, 1 \\ 1, 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2, 1, 1 \\ 1, 2, 1 \\ 1, 1, 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2, 1, 1, 1 \\ 1, 2, 1, 1 \\ 1, 1, 2, 1 \\ 1, 1, 1, 2 \end{vmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{vmatrix} 2, 0, 0, 1 \\ 0, 2, 0, 1 \\ 0, 0, 2, 1 \\ 1, 1, 1, 2 \end{vmatrix}$$

sowie die diesen äquivalenten reduzierten Formen; die bezüglichen Determinanten sind

3, 4, 5 und 4.

Alle diese Formen sind extreme Formen. Im vierdimensionalen Raume existieren danach zwei wesentlich verschiedene dichteste gitterförmige Lagerungen von lauter gleichen Kugeln.

Die nicht wesentlich positiven Kantenformen erhält man bei der Schreibweise hier aus den positiven Kantenformen für die geringeren Variabelnzahlen durch Vorsetzen so vieler aus lauter Nullen bestehender Horizontal- und Vertikalreihen, daß quadratische Systeme von n Reihen resultieren.

3. Auf die Fälle $n = 5$ und $n = 6$ bin ich in einem Aufsatze dieses Journal Bd. 101 eingegangen. Für $n = 5$ haben *Korkine* und *Zolotareff* die extremen Formenklassen in den Math. Ann. Bd. 11 bestimmt.

§ 12. *Volumen des reduzierten Raumes bis zur Determinantenfläche.*

Unter dem *Volumen eines Bereichs in der Mannigfaltigkeit A* der quadratischen Formen verstehen wir den Wert des $\frac{n(n+1)}{2}$-fachen Integrals

$$\int\int \dots \int da_{11}\, da_{12} \dots da_{nn},$$

erstreckt über diesen Bereich.

1. Es sei D irgend ein fester positiver Wert. Wir wollen den Satz beweisen:

Dasjenige Gebiet $B(D)$ des reduzierten Raumes, in welchem $D(f) \leqq D$ gilt, welches also in bezug auf die Determinantenfläche $D(f) = D$ auf der Seite des Nullpunkts liegt, *besitzt ein bestimmtes endliches Volumen.*

Da die einzelnen Gebiete dieser Art, welche zu verschiedenen Werten D gehören, unter einander homothetisch vom Nullpunkte aus sind, so wird das fragliche Volumen einen Ausdruck $v_n D^{\frac{n+1}{2}}$ haben, wobei v_n eine nur von n abhängende Konstante sein wird.

2. Wir bezeichnen mit $B(D, \varepsilon)$ den Teil des reduzierten Raumes, worin

$$D(f) \leqq D, \quad a_{11} \geqq \varepsilon$$

gilt, unter ε eine positive Größe verstanden. Diese Ungleichungen in Verbindung mit den Ungleichungen

$$(44.) \qquad a_{11} \leqq a_{22} \leqq \dots \leqq a_{nn}, \qquad \pm 2a_{hk} \leqq a_{hh} \qquad (h < k),$$

$$(45.) \qquad \lambda_n a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \leqq D(f)$$

für eine reduzierte Form liefern *obere Grenzen für die Beträge aller Koordinaten in $B(D, \varepsilon)$*, und kommt daher diesem Bereiche $B(D, \varepsilon)$ ein bestimmtes endliches Volumen zu.

3. Ist nun $\varepsilon > \varepsilon^* > 0$, so umfaßt $B(D, \varepsilon^*)$ das Gebiet $B(D, \varepsilon)$ und in der Partie, mit welcher $B(D, \varepsilon^*)$ über $B(D, \varepsilon)$ hinausragt, gilt erstlich:

$$\varepsilon^* \leqq a_{11} \leqq \varepsilon, \quad |a_{1k}| \leqq \frac{1}{2} a_{11} \, (k = 2, 3, \dots n), \quad a_{12} \geqq 0,$$

$$\lambda_n a_{11} \frac{\partial D(f)}{\partial a_{11}} \leqq D,$$

und ist darin zudem $\sum_2^n a_{hk} x_h x_k$ eine Form von $n-1$ Variabeln mit der Determinante $\frac{\partial D(f)}{\partial a_{11}}$, welche alle Bedingungen einer reduzierten solchen Form erfüllt.

Nehmen wir nun das zu beweisende Resultat als bereits sichergestellt für den Fall von $n-1$ Variabeln an, so vergrößert sich hiernach beim Übergang von $B(D, \varepsilon)$ zu $B(D, \varepsilon^*)$ das Volumen dieses Bereichs gewiß um weniger, als der Wert des Integrals

$$\frac{1}{2}\int a_{11}^{n-1} v_{n-1}\left(\frac{D}{\lambda_n a_{11}}\right)^{\frac{n}{2}} da_{11}$$

über den Bereich $0 < a_{11} \leqq \varepsilon$ beträgt, d. i. um weniger als

$$\frac{v_{n-1}}{n\lambda_n^{\frac{n}{2}}}\varepsilon^{\frac{n}{2}} D^{\frac{n}{2}}.$$

Daraus folgt, *daß das Volumen von $B(D, \varepsilon)$ mit nach Null abnehmendem ε einer bestimmten endlichen Grenze zustrebt, welche eben das Volumen von $B(D)$ definiert.*

Nachdem so die Existenz der Konstante v_n erwiesen ist, können wir hinzusetzen:

Das Volumen von $B(D, \varepsilon)$ ist

$$(46.) \qquad < v_n D^{\frac{n+1}{2}} \quad \text{und} \quad > v_n D^{\frac{n+1}{2}} - \tilde{v}_n \varepsilon^{\frac{n}{2}} D^{\frac{n}{2}},$$

wo $\tilde{v}_n$ zur Abkürzung für $\frac{1}{n} v_{n-1} \lambda_n^{-\frac{n}{2}}$ steht.

4. Wir bemerken ferner:

Das durch

$$(47.) \qquad D \leqq D(f) \leqq D^*, \; a_{11} \geqq \varepsilon$$

definierte Gebiet des reduzierten Raumes, wobei $0 < D < D^*$ und $\varepsilon > 0$ sei, hat ein Volumen, das

$$(48.) \qquad < v_n\left(D^{*\frac{n+1}{2}} - D^{\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{und} \quad > \left(v_n - \tilde{v}_n \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{D^{\frac{1}{2}}}\right)\left(D^{*\frac{n+1}{2}} - D^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

ist.

Das Gebiet (47.) nämlich ist ganz enthalten in dem Teile

$$D \leqq D(f) \leqq D^*$$

des reduzierten Raumes, woraus die obere Grenze in (48.) hervorgeht.

Andererseits enthält jenes Gebiet ganz das Gebiet

$$D \leqq D(f) \leqq D^*, \quad \vartheta = \frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{D}} \leqq \frac{a_{11}}{\sqrt[n]{D(f)}}$$

des reduzierten Raumes. Das Volumen des letzteren Gebiets ist das

$\left(D^{*\frac{n+1}{2}} - D^{\frac{n+1}{2}}\right) : D^{\frac{n+1}{2}}$-fache des Volumens des Gebiets

$$D(f) \leqq D, \quad \vartheta \leqq \frac{a_{11}}{\sqrt[n]{D(f)}} \tag{49.}$$

vom reduzierten Raume, da die durch die letzteren Bedingungen bei festem ϑ und verschiedenen Werten D definierten Gebiete homothetische Kegel vom Nullpunkte aus darstellen. Das durch (49.) bestimmte Gebiet des reduzierten Raumes endlich enthält ganz das Gebiet $B(D, \varepsilon)$, woraus die untere in (48.) genannte Grenze hervorgeht.

§ 13. *Verwendung Dirichletscher Reihen.*

Wir werden nunmehr zur Ermittlung des Volumens v_n wesentlich diejenigen Methoden heranziehen, auf welche *Dirichlet* die Bestimmung der Klassenanzahlen in der Theorie der binären Formen gegründet hat. Wir werden an Stelle des Volumenintegrals über den Bereich $B(D)$ das Integral einer gewissen Funktion über diesen Bereich betrachten, welche in einem überwiegenden Teile dieses Bereiches angenähert gleich 1 ist, und vermöge des Ausdrucks dieser Funktion wird eine Zurückführung der Bestimmung von v_n auf diejenige von v_{n-1} gelingen.

1. Es seien ε, G und σ positive Größen; wir werden schließlich unter Forderung eines gewissen Zusammenhanges unter ihnen G über jede Grenze wachsen, ε und σ nach Null abnehmen lassen. Wir setzen bereits $\sigma < \frac{1}{2}$, $G > \varepsilon$ und etwa $\varepsilon \leqq 1$ voraus.

Wir haben es hier mit dem folgenden Ausdrucke zu tun:

$$\Phi(f) = \sigma (D(f))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}} \Sigma \frac{1}{(f(x_1, \dots x_n))^{\frac{n}{2}+\sigma}}. \tag{50.}$$

Darin bedeute $f(x_1, \dots x_n) = \Sigma a_{hk} x_h x_k$ eine positive reduzierte quadratische Form von n Variabeln, $D(f)$ ihre Determinante und die Summe soll über alle diejenigen Systeme von ganzen Zahlen $x_1, \dots x_n$ erstreckt werden, welche die Ungleichungen

$$\varepsilon \leqq f(x_1, \dots x_n) < G \tag{51.}$$

erfüllen und wobei $x_1, \dots x_n$ keinen gemeinsamen Teiler > 1 haben.

2. Es bedeute andererseits $\Psi(f)$ den Wert des Ausdrucks (50.), wenn darin die Summe ausnahmslos über *alle* existierenden ganzzahligen Systeme $x_1, \dots x_n$ erstreckt wird, welche den Bedingungen (51.) genügen. *Wir lassen also bei der Definition von $\Psi(f)$ die Bedingung fallen, daß $x_1, \dots x_n$ relativ prim sein sollen.*

Wir erinnern noch an die in § 7, 1 gefundene Tatsache:

Sind $x_1, \dots x_n$ ganze Zahlen $\neq 0, \dots 0$ und ist darunter x_h die letzte von Null verschiedene Zahl, so fällt dafür

$$f(x_1, \dots x_n) \geqq \lambda_n a_{hh}$$

aus.

3. Die Untersuchung des Ausdrucks $\Psi(f)$ gründen wir auf folgende Tatsachen.

Deuten wir $x_1, \dots x_n$ als Koordinaten eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume $\mathfrak{R}_n$, so stellt

$$f(x_1, \dots x_n) < T, \tag{52.}$$

wenn T eine positive Konstante ist, *das Innere eines n-dimensionalen Ellipsoids* in diesem Raume vor. *Das Volumen in $x_1, \dots x_n$ hat für dieses Ellipsoid den Wert*

$$\gamma_n \frac{(\sqrt{T})^n}{\sqrt{D(f)}}, \tag{53.}$$

wobei

$$\gamma_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)} \tag{54.}$$

das Volumen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius 1 vorstellt (vgl. § 9).

Wir bemerken ferner, daß *der Würfelbereich*

$$-\frac{1}{2} \leqq x_1 \leqq \frac{1}{2}, \dots -\frac{1}{2} \leqq x_n \leqq \frac{1}{2} \tag{55.}$$

den Ungleichungen (44.) zufolge *völlig in das Ellipsoid*

$$f(x_1, \dots x_n) \leqq \frac{n(n+1)}{8} a_{nn} \tag{56.}$$

zu liegen kommt.

Auf Grund dieser Umstände erhalten wir eine *approximative Bestimmung für die Anzahl derjenigen ganzzahligen Systeme (Gitterpunkte)* $x_1, \dots x_n$, *welche die Bedingung* (52.) *erfüllen.*

Wir konstruieren nämlich um jeden einzelnen der betreffenden Gitterpunkte als Mittelpunkt einen Würfel mit Seitenflächen parallel den Koordinatenebenen und von der Kantenlänge 1, d. i. jedesmal den Würfel, der durch Parallelverschiebung des Würfels (55.) vom Nullpunkte nach dem betreffenden Gitterpunkte entsteht.

Da wir jeden dieser Würfel durch ein dem Ellipsoide (56.) homologes Ellipsoid umschließen können, *fällt der gesamte Bereich dieser Würfel völlig in das Gebiet des Ellipsoids*

$$f(x_1, \dots x_n) < \left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{n(n+1)}{8} a_{nn}}\right)^2$$

hinein. **Alle jene Würfel dringen nicht gegenseitig in einander ein und sind je vom Volumen 1. Danach ist die Anzahl der fraglichen Gitterpunkte sicher**

$$< \frac{\gamma_n}{\sqrt{D(f)}} \left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{n(n+1)}{8} a_{nn}}\right)^n .$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\gamma_n \left\{\left(1 + \sqrt{\frac{n(n+1)}{8\lambda_n}}\right)^n - 1\right\} = \varkappa_n ,$$

und wir können behaupten:

Die Anzahl der ganzzahligen Auflösungen von

$$f(x_1, \dots x_n) < T$$

ist, wenn $T \geqq \lambda_n a_{nn}$ *ist, sicher*

$$(57.) \qquad < \frac{1}{\sqrt{D(f)}} \left(\gamma_n T^{\frac{n}{2}} + \varkappa_n (\lambda_n a_{nn})^{\frac{1}{2}} T^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Andererseits überzeugen wir uns davon, *daß die vorhin konstruierten Würfel, falls* $T > \frac{n(n+1)}{8} a_{nn}$ *ist, gewiß das Gebiet des kleineren Ellipsoids*

$$f(x_1, \dots x_n) < \left(\sqrt{T} - \sqrt{\frac{n(n+1)}{8} a_{nn}}\right)^2$$

völlig überlagern, **und hieraus leiten wir die folgende andere Tatsache her:**

Die Anzahl der ganzzahligen Auflösungen von

$$f(x_1, \dots x_n) < T$$

ist, wenn $T \geqq \lambda_n a_{nn}$ *ist, sicher*

$$(58.) \qquad > \frac{1}{\sqrt{D(f)}} \left(\gamma_n T^{\frac{n}{2}} - \varkappa_n (\lambda_n a_{nn})^{\frac{1}{2}} T^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

Aus den beiden in (57.) und (58.) enthaltenen Grenzen entnehmen wir weiter:

Ist $T \geqq \lambda_n a_{nn}$ *und* t *ein Wert* > 1, *so liegt die Anzahl der ganzzahligen Systeme* $x_1, \dots x_n$, *welche die Ungleichungen*

$$T \leqq f(x_1, \dots x_n) < Tt$$

befriedigen, jedenfalls innerhalb der zwei Grenzen

$$(59.) \qquad \frac{1}{\sqrt{D(f)}} \left(\gamma_n (t^{\frac{n}{2}} - 1) T^{\frac{n}{2}} \pm \varkappa_n (t^{\frac{n-1}{2}} + 1) (\lambda_n a_{nn})^{\frac{1}{2}} T^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

4. Wir fassen *zunächst diejenigen Glieder aus* $\Psi(f)$ zusammen, *in denen* $f \geqq \lambda_n a_{nn}$ *und dabei* jedenfalls *auch* $f \geqq \varepsilon$ *ist.* Es sei T_n die größere der zwei unteren Schranken ε und $\lambda_n a_{nn}$ (bezw. ihr gemeinsamer Wert). Auf die letzte Angabe gestützt, können wir das ganze Aggregat der betreffenden Glieder aus $\Psi(f)$ sofort in zwei Grenzen einschließen.

Es sei $G > \lambda_n a_{nn}$. Wir setzen $G = T_n t^l$, sodaß der Exponent l eine positive ganze Zahl und der Wert $t > 1$ wird, und wir teilen das Intervall $T_n \leqq f < G$ durch Einschalten von $T_n t, \dots T_n t^{l-1}$ in die l Intervalle

$$T_n \leqq f < T_n t, \dots T_n t^{l-1} \leqq f < G.$$

Wir bestimmen für die einzelnen Intervalle nach (59.) eine obere (bezw. untere) Grenze der Anzahl der ganzzahligen Systeme $x_1, \dots x_n$, für die f in das Intervall fällt, und ersetzen in den Nennern der betreffenden Glieder aus $\Psi(f)$ die Größe $f(x_1, \dots x_n)$ durch die untere (bezw. obere) Grenze des Intervalls. Dadurch erhalten wir eine obere (bezw. untere) Grenze für jenes Aggregat aus $\Psi(f)$.

Wir finden zunächst, daß jener Anteil aus $\Psi(f)$

$$(60.) < \left\{ \gamma_n \frac{\sigma(t^{\frac{n}{2}} - 1)}{\left(1 - \frac{1}{t^\sigma}\right)} \left(\frac{1}{T^\sigma} - \frac{1}{G^\sigma} \right) + \varkappa_n (t^{\frac{n-1}{2}} + 1) \frac{\sigma}{1 - \frac{1}{t^{\frac{1}{2}+\sigma}}} T_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T_n^{\frac{1}{2}+\sigma}} - \frac{1}{G^{\frac{1}{2}+\sigma}} \right) \right\} (D(f))^{\frac{\sigma}{n}}$$

ist.

5. Es sei D eine feste positive Größe. Wir denken uns *augenblicklich f speziell im Bereiche B (D, ε) gelegen.* Dann ist also $a_{11} \geqq \varepsilon$ und aus (44.) und (45.) folgt

$$\lambda_n \varepsilon^n \leqq D(f) \leqq D, \quad \lambda_n \varepsilon \leqq \lambda_n a_{nn} \leqq \frac{D}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Wir verfügen bei dem beabsichtigten Grenzprozesse

(61.) $$\lim \varepsilon = 0, \quad \lim \sigma = 0, \quad \lim G = \infty$$

über σ, ε, G derart, daß dabei

(62.) $$\lim \varepsilon^\sigma = 1, \quad \lim G^{-\sigma} = 0$$

wird. Alsdann wird auch $\lim T_n^\sigma = 1$ sein.

Ferner können wir l als ganze Zahl abhängig von ε, σ und G noch derart einrichten, daß hierbei

$$\frac{1}{\log t} = \frac{\sigma l}{\sigma(\log G - \log T_n)}$$

nach unendlich, aber $\frac{\sigma}{\log t}$ nach Null konvergiert. Dann konvergiert also $\log t$ nach Null, mithin t nach 1. Infolge dieser Umstände *konvergiert der Term mit $\varkappa_n$ in* (60.) *nach Null.* In dem ersten Term mit dem Koeffizienten γ_n ist der Faktor

$$\frac{\sigma(t^{\frac{n}{2}} - 1)}{\left(1 - \frac{1}{t^\sigma}\right)} = \frac{n}{2} t^\sigma t^{*\frac{n}{2} - \sigma},$$

wo t^* einen Mittelwert zwischen 1 und t bedeutet, und *konvergiert dieser erste Term in* (60.) *nach* $\frac{n}{2}\gamma_n$.

Die analog herzustellende untere Grenze des fraglichen Anteils aus $\Psi(f)$ wird von dem Ausdrucke (60.) her dadurch gewonnen, daß der zweite Term subtraktiv statt additiv genommen und beiden Termen noch der Faktor $t^{-\frac{n}{2}-\sigma}$ hinzugesetzt wird. Es leuchtet ein, *daß unter den angegebenen Voraussetzungen diese untere Grenze ebenfalls nach dem Werte* $\frac{n}{2}\gamma_n$ *konvergiert.*

6. Wir haben *weiter diejenigen Terme des Ausdrucks* $\Psi(f)$ abzuschätzen, *in welchen f zwar* $\geqq \varepsilon$, *aber* $< \lambda_n a_{nn}$ *ausfällt.* Da die Konstante $\lambda_n < 1$ und a_{11} das Minimum von f ist, wird in allen Gliedern von $\Psi(f)$ stets $f > \lambda_n a_{11}$ sein.

Wir nehmen *alle diejenigen Glieder aus* $\Psi(f)$ zusammen, soweit solche

überhaupt vorhanden sind, *in welchen*

$$\left.\begin{matrix}\lambda_n a_{hh} \\ \varepsilon\end{matrix}\right\} \leqq f(x_1, \ldots x_n) < \lambda_n a_{h+1,h+1}$$

gilt, wobei h eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ sein kann. Es sei T_h die größere der zwei Größen $\lambda_n a_{hh}, \varepsilon$ bezw. ihr gemeinsamer Wert. *Wegen* $f < \lambda_n a_{h+1,h+1}$ *müssen hierbei notwendig* $x_{h+1}, \ldots x_n$ *sämtlich Null sein*; das ganze Aggregat der in Rede stehenden Glieder ist daher sicherlich kleiner als der Wert der unendlichen Reihe

$$\sigma (D(f))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}} \Sigma \frac{1}{(f(x_1, \ldots x_h, 0, \ldots 0))^{\frac{n}{2}+\sigma}},$$

erstreckt über *alle vorhandenen* ganzzahligen Systeme $x_1, \ldots x_h$, bei welchen

$$T_h \leqq f(x_1, \ldots x_h, 0, \ldots 0)$$

ist.

Wir übertragen das in der Formel (59.) entwickelte Resultat auf den Fall von Formen mit h Variabeln, und wir finden die Anzahl derjenigen ganzzahligen Systeme $x_1, \ldots x_h$, für die eine Einschränkung

$$T_h t^j \leqq f(x_1, \ldots x_h, 0, \ldots 0) < T_h t^{j+1} \qquad (j \geqq 0)$$

statthat, unter t eine fest angenommene positive Konstante (etwa 2) verstanden, kleiner als eine Größe

$$\overline{\gamma}_h \frac{(T_h t^j)^{\frac{h}{2}}}{\sqrt{a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}}},$$

worin $\overline{\gamma}_h$ eine gewisse nur von h abhängende positive Konstante vorstellt. Das Aggregat der in Rede stehenden Terme ist dann sicher

$$< \sigma (D(f))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}} \frac{\overline{\gamma}_h}{\left(1 - \frac{1}{t^{\frac{n-h}{2}+\sigma}}\right) T_h^{\frac{n-h}{2}+\sigma} \sqrt{a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}}}.$$

Hierin machen wir im Nenner von

$$\lambda_n^{-\frac{n-h-1}{2}} T_h^{\frac{n-h}{2}+\sigma} \sqrt{a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}} \geqq \varepsilon^{\frac{1}{2}+\sigma} a_{hh}^{\frac{n-h-1}{2}} \sqrt{a_{11} a_{22} \cdots a_{hh}} \geqq \varepsilon^{\frac{1}{2}+\sigma} a_{11}^{\frac{n-1}{2}}$$

Gebrauch, und mit Rücksicht hierauf kommen wir sogleich zu dem Ergebnisse:

Das Aggregat aller Terme in $\Psi(f)$, *welche den Bedingungen*

$$\varepsilon \leqq f(x_1, \ldots x_n) < \lambda_n a_{nn}$$

entsprechen, ist

$$(63.) \qquad < \mu_n \frac{\sigma (D(f))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}+\sigma} a_{11}^{\frac{n-1}{2}}},$$

worin μ_n *eine gewisse nur von n abhängende Konstante bedeutet.*

7. Wir setzen *jetzt wieder die Form f speziell im Gebiete* $B(D, \varepsilon)$ *gelegen* voraus, so daß $D(f) \leqq D$, $a_{11} \geqq \varepsilon$ ist. *Wir verfügen über* σ im Zusammenhang mit ε *noch so, daß für* $\lim \varepsilon = 0$ auch

$$\lim \left(\frac{\sigma}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \right) = 0$$

wird. Dabei wird von selber auch

$$\log (\varepsilon^{\sigma}) = (\sigma \varepsilon^{-\frac{n}{2}}) (\varepsilon^{\frac{n}{2}} \log \varepsilon)$$

nach Null, also ε^{σ} nach 1 konvergieren. Der vorstehende Ausdruck (63.) wird nunmehr für die Form f nach Null konvergieren, und wir gelangen zu dem Resultate:

Liegt f im Gebiete $B(D, \varepsilon)$, *so läßt sich der Wert von* $\Psi(f)$ *in zwei Grenzen einschließen, die unter den Voraussetzungen*

$$(64.) \qquad \lim \varepsilon = 0, \ \lim \left(\frac{\sigma}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \right) = 0, \ \lim \ G^{-\sigma} = 0$$

beide zugleich nach dem Werte $\frac{n}{2}\gamma_n$ *konvergieren.*

8. Es sei *immer noch f speziell in* $B(D, \varepsilon)$ *gelegen.* Um von dem Ausdrucke $\Psi(f)$ zu dem für uns eigentlich notwendigen Ausdrucke $\Phi(f)$ zu kommen, wollen wir *mit* Ψ_d *den Wert des Ausdrucks* (50.) bezeichnen, *wenn darin die Summe über alle solchen, den Bedingungen* $\varepsilon \leqq f < G$ *entsprechenden ganzzahligen Systeme* $x_1, \ldots x_n$ *erstreckt wird, bei denen* $x_1, \ldots x_n$ *sämtlich durch eine bestimmte positive Zahl d teilbar sind.* Bei Werten d, für welche $d^2 \varepsilon \geqq G$ ist, wird es Systeme $x_1, \ldots x_n$ der eben bezeichneten Art überhaupt nicht geben und ist daher $\Psi_d = 0$ zu setzen. *Die vorhin behandelte Summe* $\Psi(f)$ *kommt auf die Summe* Ψ_1 *hinaus.*

Wir gelangen nun von Ψ_1 zu der von uns gesuchten Summe $\Phi(f)$, indem wir, der Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, ... folgend, aus dem Aggregate Ψ_1 sukzessive alle diejenigen Terme aussondern, in denen $x_1, \dots x_n$ sämtlich durch 2, oder doch sämtlich durch 3, oder doch sämtlich durch 5, usf. aufgehen.*)

Danach ergibt sich

$$(65.)\quad \Phi(f) = \Psi_1 - \Psi_2 - (\Psi_3 - \Psi_6) - (\Psi_5 - \Psi_{10} - \Psi_{15} + \Psi_{30}) - \cdots .$$

Die Bildung dieser Reihe ist am besten dahin zu beschreiben, daß das über alle Primzahlen $p = 2, 3, 5, \dots$ zu erstreckende unendliche Produkt

$$(66.)\quad \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1 - \frac{1}{2^s} - \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{6^s}\right) - \left(\frac{1}{5^s} - \frac{1}{10^s} - \frac{1}{15^s} + \frac{1}{30^s}\right) - \cdots$$

entwickelt und jedem in dieser Entwicklung auftretenden Gliede $\pm \frac{1}{d^s}$ ein Glied $\pm \Psi_d$ *mit dem nämlichen Vorzeichen* $\pm$ in der Reihe (65.) zugeordnet wird.

Es sei hier $s = n + 2\sigma$, so ist die Reihe (66.) absolut konvergent und ihr Wert das Reziproke der über alle positiven ganzen Zahlen erstreckten Summe

$$(67.)\quad S_s = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

Setzen wir in den Gliedern von Ψ_d die Variabeln $x_h = d y_h$ an, so wird darin $f(x_1, \dots x_n) = d^2 f(y_1, \dots y_n)$, und da f in $B(D, \varepsilon)$ liegen soll, das Minimum von f also nach Voraussetzung $\geqq \varepsilon$ ist, so haben wir in Ψ_d die Summation über alle ganzzahligen Systeme $y_1, \dots y_n$ zu erstrecken, für welche

$$\varepsilon \leqq f(y_1, \dots y_n) < \frac{G}{d^2}$$

wird.

Wir denken uns nun d^* als ganze Zahl, abhängig von σ, derart gewählt, daß die Summe der Beträge aller derjenigen Glieder in (66.), welche Werten $d > d^*$ entsprechen, beliebig nahe an Null liegt und daß andererseits unter den Voraussetzungen (64.) auch $\lim (d^{*\sigma}) = 1$ wird. Alsdann haben wir nach dem Ergebnisse in 7., wenn $d \leqq d^*$ ist, unter den Voraus-

*) Vgl. hierzu *Lipschitz*, Über die asymptotischen Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Funktionen, Monatsbericht der Berliner Akademie 1865, S. 174.

setzungen (64.) jedenfalls

$$\lim\left(\Psi_d : \frac{1}{d^{n+2\sigma}}\right) = \frac{n}{2}\gamma_n.$$

Wenn aber $d > d^*$ ist, so gilt zum mindesten die Relation

$$0 \leqq \Psi_d \leqq \frac{1}{d^{n+2\sigma}}\,\Psi_1.$$

Mit Rücksicht auf diese Umstände folgt offenbar unter jenen Voraussetzungen

$$\lim \Phi(f) = \frac{n}{2}\gamma_n \lim H\left(1 - \frac{1}{p^{n+2\sigma}}\right) = \frac{n}{2}\frac{\gamma_n}{S_n}. \tag{68.}$$

Damit sind wir zu folgendem Ergebnisse gelangt:

Für alle Formen f im ganzen Bereiche $B(D, \varepsilon)$ liegt der Wert der Funktion $\Phi(f)$ zwischen zwei Grenzen, die unter den Voraussetzungen (64.) *beide zugleich nach dem Werte $\frac{n}{2}\frac{\gamma_n}{S_n}$ konvergieren.*

9. Es habe *jetzt das Minimum a_{11} von f einen beliebigen Wert*, so können wir *für das Aggregat derjenigen Glieder in $\Psi(f)$, bei welchen außer $\varepsilon \leqq f$ noch $\lambda_n a_{nn} \leqq f$ gilt*, durch (60.) *eine Konstante ν_n als obere Grenze* bestimmen, und *für das Aggregat der übrigen Glieder in $\Psi(f)$* besteht *die obere Grenze* (63.). Diese oberen Grenzen gelten um so mehr für den Wert der Summe $\Phi(f)$, und wir finden:

Es ist stets

$$0 \leqq \Phi(f) < \mu_n \frac{\sigma(D(f))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}+\sigma}\, a_{11}^{\frac{n-1}{2}}} + \nu_n, \tag{69.}$$

worin μ_n und ν_n zwei positive, nur von n abhängende Konstanten vorstellen.

10. Es sei jetzt δ *eine positive Größe* $\leqq \varepsilon$ *und wir betrachten das* $\frac{n(n+1)}{2}$*-fache Integral*

$$J(\delta) = \iint \ldots \int \Phi(f)\, da_{11}\, da_{12} \ldots da_{nn} \tag{70.}$$

der in (50.) *definierten Funktion $\Phi(f)$, erstreckt über den durch*

$$D(f) \leqq D, \quad a_{11} \geqq \delta$$

bestimmten Teil $B(D, \delta)$ des reduzierten Raumes.

Nehmen wir zunächst $\delta = \varepsilon$, so ergibt das Resultat aus 8. in Verbindung mit den Sätzen aus § 12, daß unter den Voraussetzungen (64.) jedenfalls

$$\lim J(\varepsilon) = \frac{n}{2} \frac{\gamma_n}{S_n} v_n D^{\frac{n+1}{2}}$$

ist.

Nun sei $\delta < \varepsilon$, so benutzen wir dazu noch in dem Gebiete, mit welchem der Bereich $B(D, \delta)$ über $B(D, \varepsilon)$ hinausragt, für die Funktion $\Phi(f)$ die obere Grenze (69.). Das Volumen jenes Zusatzgebietes ist nach § 12 sicher $< \tilde{v}_n \varepsilon^{\frac{n}{2}} D^{\frac{n}{2}}$. Im ersten Term von (69.) ersetzen wir $(D(f))^{\frac{\sigma}{n}}$ durch die obere Grenze $D^{\frac{\sigma}{n}}$; andererseits ermitteln wir eine obere Grenze für das $\frac{n(n+1)}{2}$-fache Integral

$$\int\int \cdots \int \frac{(D(f))^{\frac{1}{2}}}{a_{11}^{\frac{n-1}{2}}} da_{11}\, da_{12} \ldots da_{nn},$$

erstreckt über den ganzen Bereich $B(D, \delta)$, indem wir ähnlich wie in § 12 vorgehen. Indem wir die Integration nach $a_{22}, a_{23}, \ldots a_{nn}$ und zwar zunächst über die Flächen $\frac{\partial D(f)}{\partial a_{11}} =$ konst. ausführen, ferner nach $a_{12}, \ldots a_{1n}$ integrieren, finden wir das betreffende Integral (vgl. § 12, 3)

$$< \int \frac{a_{11}^{\frac{1}{2}}}{a_{11}^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{2} a_{11}^{n-1} da_{11} \int C^{\frac{1}{2}} v_{n-1} d\left(C^{\frac{n}{2}}\right),$$

über den Bereich

$$0 < \lambda_n a_{11}^n \leqq D, \qquad 0 < \lambda_n a_{11} C \leqq D$$

erstreckt. Das Doppelintegral hier wird

$$\frac{n}{n+1} v_{n-1} \left(\frac{D}{\lambda_n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int \frac{1}{2} a_{11}^{-\frac{1}{2}} da_{11} = \frac{n}{n+1} v_{n-1} \left(\frac{D}{\lambda_n}\right)^{\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Berücksichtigen wir nun, *daß im ersten Term von* (69.) *noch der Faktor* $\frac{\sigma}{\varepsilon^{\frac{1}{2}+\sigma}}$ *auftritt, der unter den Voraussetzungen* (64.) *nach Null konvergiert*, so können wir endlich den Satz aussprechen:

Das Integral $J(\delta)$, über den Bereich $B(D, \delta)$ erstreckt, wobei δ beliebig $\leqq \varepsilon$ ist, liegt zwischen zwei Grenzen, die unter den Voraussetzungen (64.) *beide nach dem Werte*

$$\frac{n}{2}\frac{\gamma_n}{S_n} v_n D^{\frac{n+1}{2}} \tag{71.}$$

konvergieren.

§ 14. *Auswertung des Volumens.*

Auf Grund dieses Satzes können wir jetzt die Berechnung von v_n auf die Berechnung von v_{n-1} zurückführen.

1. **Sind $p_1, p_2, \dots p_n$ n ganze Zahlen** *ohne gemeinsamen Teiler* >1, **so kann man stets dazu ganzzahlige unimodulare Substitutionen P** *mit diesen Zahlen als erster Vertikalreihe* **finden. Ist P_0 eine erste solche Substitution, P eine beliebige Substitution dieser Art, so hat** *die Substitution $P_0^{-1} P$ als erste Vertikalreihe die Zahlen* $1, 0, \dots 0$ **wie die identische Substitution, und können wir** *jedesmal in bestimmter Weise* $P = P_0 Q R$ **setzen, so daß Q die erste Variable völlig ungeändert läßt, also** *in Q auch noch die erste Horizontalreihe* $1, 0, \dots 0$ **ist und R** *eine Substitution von der Gestalt*

$$y_1 = z_1 + r_2 z_2 + \cdots + r_n z_n, \quad y_2 = z_2, \dots, \quad y_n = z_n$$

wird.

2. **Nun mögen ε, G, σ und $\delta \leqq \varepsilon$ wie in § 13 vorausgesetzt sein, und f sei eine Form im Bereiche $B(D, \delta)$. Sodann seien $p_1, p_2, \dots p_n$ solche ganzen Zahlen** *ohne gemeinsamen Teiler* >1, **daß**

$$\varepsilon \leqq f(p_1, p_2, \dots p_n) = b_{11} < G \tag{72.}$$

wird. Wir führen P_0, P, Q, R wie soeben ein. Die durch $P = P_0 Q R$ aus f hervorgehende Form hat b_{11} *als ersten Koeffizienten.* **Wir schreiben diese Form**

$$\varphi = \Sigma b_{hk} y_h y_k = b_{11}\left(y_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n\right)^2 + \psi, \tag{73.}$$

$$\psi = c_{22} y_2^2 + 2 c_{23} y_2 y_3 + \cdots + c_{nn} y_n^2, \tag{74.}$$

wobei

$$c_{hk} = b_{hk} - \frac{b_{1h} b_{1k}}{b_{11}} \qquad (h \leqq k;\ h, k = 2, 3, \dots n) \tag{75.}$$

gesetzt ist. Die Determinante von ψ wird dabei

$$= \frac{D(f)}{b_{11}}.$$

Wir können *zunächst* P_0 *irgendwie unimodular mit* $p_1, p_2, \dots p_n$ *als erster Vertikalreihe* gewählt annehmen, sodann Q derart bestimmen, daß *die Form* $\psi(y_2, y_3, \dots y_n)$ *von* $n-1$ *Variabeln* als solche *reduziert* wird, also gewisse nach § 5 und § 6 in endlicher Anzahl anzuweisende lineare Ungleichungen

(76.) $$\Sigma' m_{hk} c_{hk} \geqq 0 \qquad (h, k = 2, 3, \dots n)$$

erfüllt, wobei im allgemeinen für Q die Wahl zwischen zwei entgegengesetzten Substitutionen Q^*, $-Q^*$ sein wird. Weiter können wir R so bestimmen, *daß alle Ungleichungen*

(77.) $$\pm \frac{b_{12}}{b_{11}} \leqq \frac{1}{2}, \dots \pm \frac{b_{1n}}{b_{11}} \leqq \frac{1}{2}$$

eintreten, und endlich können wir uns noch zwischen Q^* und $-Q^*$ derart entscheiden, *daß*

(78.) $$b_{12} \geqq 0$$

wird. Durch die vorstehenden Forderungen sind dann Q, R und damit auch $P = P_0 Q R$ in dem Falle *eindeutig* bestimmt, wo in keiner der dabei zu betrachtenden Ungleichungen (76.), (77.), (78.) sich das Gleichheitszeichen einstellt.

3. *Jetzt sei* ϑ *ein positiver Wert* $\leqq \delta$ *und wir fassen für* φ *den Bereich aller derjenigen Formen ins Auge, bei welchen*

(79.) $$\varepsilon \leqq b_{11} < G, \quad D(\varphi) \leqq D, \quad \vartheta \leqq c_{22}$$

ist und zudem alle Ungleichungen (76.), (77.), (78.) *bestehen.*

Das Minimum einer nach (73.), (74.) dargestellten Form φ ist gewiß nicht größer als das Minimum der binären Form

$$b_{11}\left(y_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2\right)^2 + c_{22} y_2^2$$

und letzteres Minimum ist (vgl. § 5, 1.) $\leqq \sqrt{\frac{4}{3} b_{11} c_{22}}$. Soll φ einer Form f in $B(D, \delta)$ äquivalent sein und (72.) gelten, so ist daher notwendig

$$\delta \leqq \sqrt{\frac{4}{3} G c_{22}},$$

und φ *kommt sicher in den obigen Bereich zu liegen, wofern wir* $\vartheta = \frac{3\delta^2}{4G}$ *voraussetzen.*

Andererseits ist eine beliebige durch φ mittelst ganzer, nicht sämtlich verschwindender Zahlen $y_1, y_2, \dots y_n$ darstellbare Größe entweder $\geqq c_{22} \geqq \vartheta$, weil c_{22} das Minimum von ψ ist, oder, wofern dabei $y_2, \dots y_n$ sämtlich Null sind, doch $\geqq b_{11} \geqq \varepsilon \geqq \delta \geqq \vartheta$. *Danach fallen die zu den Formen* φ *des obigen Bereichs äquivalenten reduzierten Formen* f *sicher stets in* $B(D, \vartheta)$ *hinein.*

Für die Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \dots b_{nn}$ in φ sind gewisse obere, bloß von $\varepsilon, G, \vartheta, D$ abhängende Grenzen angebbar, und kommen dadurch bei gegebenen Werten dieser Größen von vorn herein nur eine *endliche* Anzahl unimodularer ganzzahliger Substitutionen P in Frage, durch welche eine reduzierte Form f in $B(D, \vartheta)$ in eine den Bedingungen (76.), (77.), (78.), (79.) entsprechende Form φ übergehen könnte.

Danach verteilt sich der obige Bereich der Formen φ *ganz auf eine endliche Anzahl der mit dem reduzierten Raume* B *äquivalenten Kammern* B_p. Angenommen ferner, φ fällt weder auf die begrenzenden Seitenwände dieser Kammern noch auf eine der durch die Gleichheitszeichen in (76.), (77.), (78.) angewiesenen Flächen; dann ist einerseits die zu φ äquivalente reduzierte Form f sowie das Paar entgegengesetzter ganzzahliger unimodularer Substitutionen $P, -P$, durch welche f in φ übergeht, *eindeutig* bestimmt; und andererseits gibt es auch keine von P und $-P$ verschiedene ganzzahlige unimodulare Substitution P^* mit der nämlichen ersten Vertikalreihe wie P oder $-P$, durch welche f in eine *andere*, ebenfalls allen jenen Ungleichungen (76.), (77.), (78.), (79.) genügende Form φ^* überginge.

4. *Wir bilden nun das* $\frac{n(n+1)}{2}$*-fache Integral*

$$(80.) \qquad K(\vartheta) = \int\int \cdots \int 2\sigma \frac{(D(\varphi))^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}}}{b_{11}^{\frac{n}{2}+\sigma}} db_{11} db_{12} \dots db_{nn},$$

erstreckt über den ganzen, durch die Ungleichungen (76.), (77.), (78.), (79.) *definierten Bereich.* Aus den soeben entwickelten Tatsachen geht dann folgendes Verhältnis dieses Integrals zu dem in (70.) eingeführten Integrale $J(\delta)$ hervor:

Wir haben, wenn $\delta \leqq \varepsilon$ *ist:*

$$(81.) \qquad J(\delta) < K\left(\frac{3\delta^2}{4G}\right) < J\left(\frac{3\delta^2}{4G}\right).$$

Um das Integral $K(\vartheta)$ auszuwerten, führen wir zunächst $c_{22}, c_{23}, \dots c_{nn}$ anstatt $b_{22}, b_{23}, \dots b_{nn}$ gemäß (75.) ein, wobei die zugehörige Funktionaldeterminante den Wert 1 hat, sodann bewerkstelligen wir die Integration nach $c_{22}, c_{23}, \dots c_{nn}$ und zwar *zunächst über Flächen konstanter Determinante von* ψ und hernach für alle in Betracht kommenden Werte C dieser Determinante, endlich leisten wir auch die Integration nach $b_{12}, \dots b_{1n}$.

Übertragen wir das in § 12 (47.) und (48.) dargestellte Ergebnis auf den Fall von $n-1$ Variabeln, so erhalten wir auf diese Weise als eine *obere Grenze für* $K(\vartheta)$ den Wert

$$\int 2\sigma\, b_{11}^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}} \frac{1}{2} \frac{b_{11}^{n-1} db_{11}}{b_{11}^{\frac{n}{2}+\sigma}} \int C^{\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{n}} v_{n-1} d\left(C^{\frac{n}{2}}\right),$$

über den Bereich

$$\varepsilon \leqq b_{11} < G, \qquad 0 < b_{11} C \leqq D$$

erstreckt, d. i.

$$\frac{n}{n+1+\frac{2\sigma}{n}} v_{n-1} D^{\frac{n+1}{2}+\frac{\sigma}{n}} \left(\frac{1}{\varepsilon^\sigma} - \frac{1}{G^\sigma}\right). \tag{82.}$$

Sodann haben wir eine *untere Grenze für das Integral* $K(\vartheta)$, welche *aus dieser oberen Grenze durch Verminderung um*

$$\int \sigma b_{11}^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\sigma+\frac{\sigma}{n}} db_{11} \int C^{\frac{\sigma}{n}} \vartheta^{\frac{n-1}{2}} \tilde{v}_{n-1} d\left(C^{\frac{n}{2}}\right)$$

entsteht; letzterer Ausdruck ist

$$= \frac{n}{n+\frac{2\sigma}{n}} \tilde{v}_{n-1} D^{\frac{n}{2}+\frac{\sigma}{n}} \frac{\sigma}{\frac{1}{2}-\sigma} \vartheta^{\frac{n-1}{2}} \left(G^{\frac{1}{2}-\sigma} - \varepsilon^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \tag{83.}$$

und *konvergiert für* $\vartheta \leqq \frac{3\varepsilon^2}{4G}$ *und unter den Voraussetzungen* (64.) *nach Null.*

Auf Grund der Ungleichungen (81.) und des in § 13, 10. festgestellten Satzes über das Integral $J(\delta)$ gelangen wir nun durch Ausführung des Grenzprozesses (64.) zu folgender *Rekursionsformel:*

$$\frac{n}{2} \frac{\gamma_n}{S_n} v_n = \frac{n}{n+1} v_{n-1}. \tag{84.}$$

Da $v_1 = 1$ ist, erhalten wir unter Einführung des Wertes von γ_n (vgl. (54.))

diese *Bestimmung von* v_n:

$$(85.) \qquad v_n = \frac{2}{n+1} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2+3+\cdots+n}} S_2 S_3 \ldots S_n.$$

Darin bedeutet Γ das Zeichen für die Gammafunktion und S_k steht für den Wert der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots.$$

§ 15. *Maximale Dichte bei gitterförmiger Lagerung von Kugeln.*

Von der Bestimmung des Volumens v_n machen wir eine *Anwendung auf die Frage der dichtesten Lagerung von Kugeln im n-dimensionalen Raume.*

Nehmen wir an, der größte Wert, den das Minimum $M(f)$ bei den sämtlichen positiven Formen f von der Determinante 1 überhaupt erreicht, sei ϱ_n, so enthält jede positive Formenklasse f von einer Determinante $\leqq 1$ wenigstens eine Form

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_n) = \Sigma b_{hk} y_h y_k = b_{11}\left(y_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}} y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}} y_n\right)^2 + \psi(y_2, \ldots y_n),$$

wobei

$$0 < b_{11} \leqq \varrho_n \sqrt[n]{D(f)}, \quad \pm\frac{b_{12}}{b_{11}} \leqq \frac{1}{2}, \cdots \pm\frac{b_{1n}}{b_{11}} \leqq \frac{1}{2}, \quad b_{12} \geqq 0,$$

$$D(f) = b_{11}\,\text{Det.}\,(\psi) \leqq 1$$

und ψ eine reduzierte Form der $n-1$ Variabeln $y_2, \ldots y_n$ ist.

Das über den hierdurch definierten Bereich von Formen φ erstreckte $\frac{n(n+1)}{2}$-fache Integral

$$\int\int \cdots \int db_{11}\, db_{12} \cdots db_{nn}$$

wird infolgedessen mindestens so groß, ja, wie man leicht erkennt, größer als das Volumen des reduzierten Raumes der Formen mit Determinanten $\leqq 1$ sein. Dieses Integral hier findet sich

$$= \int_0^{\varrho_n} \frac{1}{2}\, b_{11}^{n-1}\, v_{n-1} \left(\left(\frac{1}{b_{11}}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{b_{11}^{n-1}}{\varrho_n^n}\right)^{\frac{n}{2}}\right) db_{11} = \frac{v_{n-1}}{n+1}\, \varrho_n^{\frac{n}{2}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2^n}\varrho_n^{\frac{n}{2}}\gamma_n > \frac{1}{2^{n-1}}S_n. \tag{86.}$$

Wir können dieses Resultat folgendermaßen aussprechen:

Im n-dimensionalen Raume gibt es sicher solche parallelepipedische Lagerungen von lauter kongruenten Kugeln, daß der von den Kugeln erfüllte Raum mehr als das $\frac{1}{2^{n-1}}S_n$*-fache des ganzen unendlichen Raumes beträgt.*

Dazu bemerken wir, daß bei einer *„tetraedrischen"* Schichtung von Kugeln, welche der jedenfalls *extremen* Form

$$f=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

entspricht, genau der

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n+1}}\gamma_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n+1}\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\text{-te Teil}$$

des unendlichen Raumes durch die Kugeln ausgefüllt wird, welcher Anteil *bei großem n wesentlich kleiner als der vorhin genannte Teil* ist, während allerdings in der Ebene und im Raume von 3 Dimensionen diese Schichtung nach regulären Dreiecken bezw. Tetraedern überhaupt die einzige dichteste gitterförmige Lagerung von kongruenten Kreisen bezw. Kugeln vorstellt.

§ 16. *Asymptotisches Gesetz für die Klassenanzahlen ganzzahliger Formen.*

Dem Volumen v_n kommt eine besondere *arithmetische Bedeutung* zu. Wir betrachten speziell die positiven Formen f mit lauter *ganzzahligen* Koeffizienten a_{hk}. Dabei ist immer $a_{11}\geqq 1$. Mit Rücksicht hierauf haben wir den Ungleichungen (44.), (45.) zufolge *zu einem gegebenen positiven ganzzahligen Wert* $D(f)=D$ immer nur eine endliche Anzahl verschiedener reduzierter Formen mit ganzzahligen Koeffizienten und also auch *nur eine endliche Anzahl verschiedener Klassen ganzzahliger positiver Formen.* Diese *Klassenanzahl für die Determinante* D werde mit $H(D)$ bezeichnet.

Wir werden das asymptotische Gesetz nachweisen:

$$\lim_{D=\infty}\left(\frac{H(1)+H(2)+\cdots+H(D)}{D^{\frac{n+1}{2}}}\right)=v_n. \tag{87.}$$

1. Wir fassen in der Mannigfaltigkeit A aller quadratischen Formen $f=(a_{hk})$ diejenigen Punkte (a^0_{hk}) ins Auge, bei welchen *alle* $\frac{n(n+1)}{2}$ *Koordinaten* a^0_{hk} *ganze rationale Zahlen* sind, und wir konstruieren um jeden solchen Punkt (a_{hk}) als Mittelpunkt den Würfelbereich

$$(88.) \qquad -\frac{1}{2} \leqq a_{hk} - a^0_{hk} \leqq \frac{1}{2} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n).$$

Wir erhalten ein *Netz von Würfeln,* welches die ganze Mannigfaltigkeit A *einfach und lückenlos* überdeckt.

Es sei nun D eine positive ganze Zahl, und wir bilden den Bereich $B(D, 1)$, der aus dem reduzierten Raume B durch die Forderungen

$$D(f) \leqq D, \quad a_{11} \geqq 1$$

herausgeschnitten wird. Es mögen N jener Würfel vollständig in diesen Bereich $B(D, 1)$ fallen und N^* darunter vorhanden sein, welche zwar nicht ganz in diesen Bereich fallen, aber doch in das Innere dieses Bereiches eintreten. *Zufolge der Ungleichungen* (46.) *wird dann*

$$(89.) \qquad N < v_n D^{\frac{n+1}{2}}, \quad N + N^* > v_n D^{\frac{n+1}{2}} - \tilde{v}_n D^{\frac{n}{2}}$$

sein.

Andererseits repräsentieren die Mittelpunkte der hier in der Anzahl N gezählten Würfel lauter *verschiedene* Klassen *ganzzahliger* positiver Formen, *wobei die Determinante einen der Werte* $1, 2, \ldots D$ *hat,* und wird *jede* Klasse solcher Formen durch *wenigstens einen* unter den Mittelpunkten jener $N + N^*$ Würfel repräsentiert. *Also ist*

$$(90.) \qquad N \leqq H(1) + H(2) + \cdots + H(D) \leqq N + N^*.$$

Um das Resultat (87.) zu gewinnen, wird nunmehr nach (89.) und (90.) eine solche Abschätzung der Größe N^* hinreichend sein, aus welcher sich

$$\lim_{D=\infty} \left(\frac{N^*}{D^{\frac{n+1}{2}}} \right) = 0$$

erschließen läßt.

2. Zu diesem Ende stellen wir zunächst einen einfach zu charakterisierenden Bereich fest, der alle jene $N + N^*$ Würfel vollständig in sich aufnimmt.

In einem beliebigen dieser Würfel gibt es stets solche Punkte (a_{hk}^*), die in $B(D, 1)$ hineinfallen, für welche also insbesondere

$$(91.) \qquad 1 \leqq a_{11}^* \leqq a_{22}^* \leqq \cdots \leqq a_{nn}^*, \quad \pm 2\, a_{hk}^* \leqq a_{hh}^* \qquad (h<k),$$

$$(92.) \qquad \lambda_n a_{11}^* \, a_{22}^* \cdots a_{nn}^* \leqq D$$

ist. Andererseits erfüllt im ganzen Bereiche des einzelnen Würfels *jeder* Punkt (a_{hk}) in bezug auf den *Mittelpunkt* (a_{hk}^0) des Würfels die Bedingungen (88.). Namentlich gelten also diese Bedingungen für die Punkte $(a_{hk}) = (a_{hk}^*)$, und folgt daher

$$\frac{1}{2} \leqq a_{hh}^* - \frac{1}{2} \leqq a_{hh}^0.$$

Als *ganze* Zahlen sind hiernach die Werte a_{hh}^0 notwendig sämtlich $\geqq 1$. Nunmehr haben wir im ganzen Würfel

$$\frac{1}{2} \leqq a_{hh}^0 - \frac{1}{2} \leqq a_{hh}.$$

Sodann folgt, immer mit Heranziehung von (91.) und von (88.),

$$a_{hh} \leqq a_{hh}^* + 1 \leqq a_{h+1,\,h+1}^* + 1 \leqq a_{h+1,\,h+1} + 2 \leqq 5\, a_{h+1,\,h+1} \qquad (h<n),$$

weiter

$$|a_{hk}| - 1 \leqq |a_{hk}^*| \leqq \frac{1}{2} a_{hh}^* \leqq \frac{1}{2}(a_{hh} + 1), \quad |a_{hk}| \leqq \frac{7}{2} a_{hh} \qquad (h<k).$$

Endlich haben wir

$$a_{hh} \leqq a_{hh}^* + 1 \leqq 2\, a_{hh}^*$$

und bringen diese Ungleichungen mit (92.) in Verbindung.

Wir kommen damit zu folgendem Ergebnisse:

Die oben konstruierten $N + N^*$ Würfel fallen mit allen ihren Punkten in den durch die Bedingungen

$$(93.) \qquad \frac{1}{2} \leqq a_{11}, \quad a_{hh} \leqq 5\, a_{h+1,\,h+1}, \quad |a_{hk}| \leqq \frac{7}{2} a_{hh} \qquad (h<k),$$

$$(94.) \qquad \frac{\lambda_n}{2^n} a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \leqq D$$

definierten Bereich hinein.

3. Der anschaulicheren Ausdrucksweise wegen wollen wir in der Mannigfaltigkeit A von der *Größe einer Oberfläche* und von *orthogonalen*

Projektionen auf eine Ebene sprechen, indem wir der Definition dieser Begriffe die Formel

$$\sqrt{da_{11}^2+da_{12}^2+\cdots+da_{nn}^2}$$

als *Länge eines Linienelements* zugrunde legen. Es wird sich nunmehr um die *Oberfläche des durch* (93.), (94.) *definierten Körpers* handeln, und wir werden *für die Größe dieser Oberfläche eine obere Grenze von der Gestalt*

$$(95.)\qquad \varpi_2 D\log D \text{ für } n=2 \text{ bezw. } \varpi_n D^{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}} \text{ für } n>2$$

nachweisen, worin ϖ_n eine nur von n abhängende Konstante vorstellt. Im Falle $n=2$ wollen wir uns hierbei $D\geqq 2$ denken.

Im Volumenintegral des durch (93.), (94.) angewiesenen Körpers entspricht einem Intervall a_{11} bis $a_{11}+da_{11}$ des ersten Koeffizienten ein gewisser Beitrag

$$7^{n-1}a_{11}^{n-1}da_{11}\iint\cdots\int da_{22}da_{23}\cdots da_{nn}.$$

Projizieren wir andererseits diesen Körper orthogonal auf die Ebene $a_{11}=0$ und beachten, wie diese Projektion sukzessive anwächst, während der Parameter a_{11} von $\frac{1}{2}$ an kontinuierlich zunimmt, so entspricht der Zunahme von a_{11} bis $a_{11}+da_{11}$ des Parameters eine Vergrößerung jener Projektionsfläche um

$$d(7^{n-1}a_{11}^{n-1})\iint\cdots\int da_{22}da_{23}\cdots da_{nn},$$

wobei der Integrationsbereich von $a_{22}, a_{23}, \ldots a_{nn}$ der nämliche wie soeben ist. Dadurch zeigt sich, daß die durch das Gleichheitszeichen in (94.) gelieferte begrenzende Fläche dieses Körpers auf die Ebene $a_{11}=0$ eine Projektion ergibt, deren Flächeninhalt gewiß nicht größer ist als der Wert des Integrals

$$\iint\cdots\int(n-1)\frac{da_{11}}{a_{11}}da_{12}\cdots da_{nn},$$

über den ganzen Körper erstreckt. *Hieraus resultiert zunächst für diese Projektion der Fläche* (94.) *auf die Ebene* $a_{11}=0$ *eine obere Grenze vom Typus* (95.).

Nun hat in einem beliebigen Punkte (a_{hk}) der begrenzenden Fläche (94.) die Tangentialebene an diese Fläche in laufenden Koordinaten (b_{hk})

die Gleichung

$$\frac{1}{n}\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}+\frac{b_{22}}{a_{22}}+\cdots+\frac{b_{nn}}{a_{nn}}\right)=1;$$

wir ersehen daraus in Anbetracht der Ungleichungen (93.), *daß die Größe dieser Oberfläche ein gewisses, nur von n abhängendes Vielfaches ihrer Projektion auf die Ebene* $a_{11}=0$ *nicht überschreitet.*

Projizieren wir andererseits den ganzen durch (93.), (94.) definierten Körper auf die Ebene

$$b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}=0, \tag{96.}$$

welche einer Tangentialebene der begrenzenden Fläche (94.) parallel läuft, so wird die entstehende Projektion *einmal* genau von der Projektion dieser begrenzenden Fläche (94.) geliefert und *ein zweites Mal* genau von den Projektionen aller übrigen durch die Ungleichungen (93.) angewiesenen ebenen Seitenwände des Körpers überdeckt, wobei keine dieser ebenen Seitenwände orthogonal zur Ebene (96.) ist. *Danach bestehen auch für die Flächeninhalte aller jener ebenen Seitenwände obere Grenzen vom Typus* (95.) und folgt endlich auch eine solche obere Grenze für die gesamte Oberfläche des in Rede stehenden Körpers.

4. Wir kommen endlich auf die oben in der Anzahl N^* gezählten Würfel zurück. *Jeder dieser Würfel hat mit der Begrenzung des Bereichs* $B(D, 1)$ *Punkte gemein.* Diese Begrenzung besteht *erstens* aus einem Anteil der Fläche $D(f)=D$, *zweitens* aus Partieen in den ebenen Seitenwänden des reduzierten Raumes, *drittens* aus einem Stück der Ebene $a_{11}=1$.

Betrachten wir *zunächst diejenigen unter jenen* N^* *Würfeln, welche die Fläche* $D(f)=D$ *treffen.* Wir ordnen diese Würfel in *Serien* nach ihren Projektionen auf die Ebene $a_{11}=0$. Es seien darunter zwei Würfel mit gleicher Projektion auf diese Ebene da, ihre Mittelpunkte seien $a_{11}^0, a_{12}^0, \ldots a_{nn}^0$ und $a_{11}^0+d,\ a_{12}^0, \ldots a_{nn}^0$, so daß d eine positive ganze Zahl ist, und es seien $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ und $a_{11}+\varepsilon_{11}, a_{12}+\varepsilon_{12}, \ldots a_{nn}+\varepsilon_{nn}$ je ein Punkt in diesen Würfeln auf der Determinantenfläche $D(f)=D$. Dabei ist $d-1\leqq\varepsilon_{11}\leqq d+1$ und sind $\varepsilon_{12}, \ldots \varepsilon_{nn}$ dem Betrage nach $\leqq 1$; für $h\geqq 2$ folgt aus $a_{hh}+\varepsilon_{hh}\geqq 1$ und $\varepsilon_{hh}\geqq -1$ noch $a_{hh}+\varepsilon_{hh}\geqq\frac{1}{2}a_{hh}$. Bilden wir nun die Differenz

$$\frac{1}{\frac{\partial\,\mathrm{Det.}|a_{hk}+\varepsilon_{hk}|}{\partial a_{11}}}(\mathrm{Det.}|a_{hk}+\varepsilon_{hk}|-\mathrm{Det.}|a_{hk}|)=0,$$

so hat darin ε_{11} den Koeffizienten 1; für die übrigen Glieder aber können

wir vermöge (91.) (vgl. auch (17.) für $m=1$) obere Grenzen angeben, die nur von n abhängen, sodaß sich aus dieser Gleichung für $d+1$ und damit auch *für die Maximalzahl der Würfel in einer jener Serien eine nur von n abhängende obere Grenze* ergibt. Das Volumen der in Rede stehenden Würfel übersteigt nun nicht das Produkt dieser Maximalzahl in die Projektion der Gesamtheit jener Würfel auf die Ebene $a_{11}=0$, und letztere Projektion ist sicher nicht größer als die Projektion des ganzen, durch (93.), (94.) bestimmten Körpers auf die Ebene $a_{11}=0$.

Nehmen wir *weiter diejenigen der N^* Würfel, welche eine bestimmte ebene Seitenwand*

(I, II.) $$\Sigma m_{hk} a_{hk} = 0$$

des reduzierten Raumes treffen. Wählen wir irgend einen solchen Koeffizienten a_{hk} aus, für den der Faktor m_{hk} hier $\gtrless 0$ ist, so finden wir, daß die Anzahl derjenigen unter den betrachteten Würfeln, welche eine und die nämliche Projektion auf die Ebene $a_{hk}=0$ liefern, nicht größer als eine gewisse aus den numerischen Faktoren in dieser Gleichung folgende Größe ist. Andererseits ist die gesamte Projektion aller dieser Würfel auf die Ebene $a_{hk}=0$ nicht größer als die Projektion des ganzen Bereichs (93.), (94.) auf diese Ebene.

Endlich ist *die Anzahl derjenigen unter den N^* Würfeln, welche die Ebene $a_{11}=1$ durchsetzen*, nicht größer als die Seitenwand $a_{11}=\frac{1}{2}$ des durch (93.), (94.) bestimmten Körpers.

Aus allen diesen Umständen zusammen entnehmen wir für die Zahl N^* ebenfalls eine obere Grenze vom Typus (95.), und wir gelangen dadurch zu folgendem Theoreme:

Die Gesamtanzahl aller verschiedenen Klassen ganzzahliger positiver quadratischer Formen mit n Variabeln und von den Determinanten $1, 2, \ldots D$ *ist zwischen zwei Grenzen*

$$v_2 D^{\frac{3}{2}} \pm \omega_2 D \log D \text{ für } n=2 \quad \text{bezw.} \quad v_n D^{\frac{n+1}{2}} \pm \omega_n D^{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}} \text{ für } n>2$$

eingeschlossen, wobei v_n das Volumen des Raumes der reduzierten Formen mit Determinanten $\leqq 1$ und ω_n eine gewisse andere positive, nur von n abhängende Konstante vorstellt.

Dabei ist im Falle $n=2$ die Zahl $D \geqq 2$ gedacht.

Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

Par M. *Emile Picard* à Paris.

Je me suis occupé dans différents mémoires et dans la partie jusqu'ici publiée de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* de divers problèmes concernant la connexion *linéaire* et la connexion *à deux dimensions* des surfaces algébriques. Je me propose de compléter ici en quelques points ce qui concerne la connexion linéaire. Quoique les méthodes suivies soient bien différentes dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable et dans celles de deux variables, l'analogie plus ou moins grande avec des questions, auxquelles *Riemann* a rattaché le nom de *Dirichlet*, nous permet de penser que ce travail ne sera pas déplacé dans un volume dédié au souvenir de *Dirichlet*.

I.

1. Partons, comme nous le faisons habituellement, d'une surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1.}$$

placée arbitrairement par rapport aux axes, et n'ayant que des singularités ordinaires, c'est-à-dire une ligne double avec points triples, le genre d'une section plane arbitraire de la surface étant désigné par p. Soit

$$\int \frac{Q(x, y, z)dx}{f'_z} \tag{2.}$$

une intégrale abélienne *arbitraire de seconde espèce* de la courbe entre x et z

définie par l'équation (1.), où Q est un polynome en x, y et z s'annulant sur la courbe double de la surface. Dans ma théorie, l'équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$, à coefficients rationnels en y, à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale (2.) regardées comme fonctions de y, joue un rôle important.

Un théorème fondamental est le suivant:*) La condition nécessaire et suffisante pour que la surface donnée ait une connexion linéaire égale à $r+1$ (ou, ce qui revient au même, possède r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce) est que *l'équation E admette, comme solutions, r polynomes en y linéairement indépendants, qui sont des périodes distinctes de* (2.)

2. Complétons d'abord cette étude de l'équation différentielle linéaire E par quelques remarques importantes.

En laissant de côté les r polynomes dont nous venons de parler, on peut avoir $2p-r$ autres périodes, qui satisfont à une équation différentielle linéaire, que nous appellerons E_0, à coefficients rationnels en y. Ces $2p-r$ autres périodes sont celles que nous avons désignées d'une manière générale par la lettre Ω, et qui correspondent chacune à un point critique b de l'équation E**). Ainsi, nous avons ici l'équation E_0 qui admet comme solutions $2p-r$ périodes distinctes de l'intégrale (2.), mais les $2p-r$ cycles correspondants *sont des cycles nuls* pour la surface algébrique f; ce sont les r autres cycles correspondants aux périodes représentées par des polynomes qui *sont les cycles effectifs* de la surface algébrique. Le partage des deux catégories de cycles ainsi effectué est très net.

Ceci posé, désignons les r périodes qui sont des polynomes par

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots \omega_r$$

et soient

$$\Omega_1,\ \Omega_2, \ldots \Omega_{2p-r}$$

les $2p-r$ autres périodes, solutions de l'équation E_0.

Le groupe de l'équation E (à coefficients entiers et de déterminant *un*)

*) *E. Picard.* Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique (Annales de l'École Normale Supérieure, 1905, p. 72).

**) Voir tome I (p. 95) et tome II (p. 332) de ma Théorie des fonctions algébriques de deux variables.

a été souvent considéré dans mes recherches, et nous avons vu, conséquence d'une propriété classique des intégrales abéliennes, qu'il laissait invariable une certaine forme bilinéaire.

En fait, ce groupe, en faisant usage des variables ω et Ω, a nécessairement la forme

$$(3.)\quad \begin{cases} v_1 = \omega_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_r = \omega_r \\ Y_1 = a_{1,1}\Omega_1 + a_{1,2}\Omega_2 + \cdots + a_{1,2p-r}\Omega_{2p-r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{2p-r} = a_{2p-r,1}\Omega_1 + a_{2p-r,2}\Omega_2 + \cdots + a_{2p-r,2p-r}\Omega_{2p-r}. \end{cases}$$

Si nous posons, pour plus de symétrie

$$\omega_{r+1} = \Omega_1, \quad \omega_{r+2} = \Omega_2, \ldots \omega_{2p} = \Omega_{2p-r},$$

nous aurons une forme bilinéaire

$$(4.)\quad \sum_i \sum_k c_{ik}\omega_i v_k \qquad (c_{ik} = -c_{ki})$$

les c étant des entiers de déterminant un, qui restera invariable, quand on effectuera sur les ω et les v toutes les substitutions (3.) de notre groupe.

3. Il y a, dans (4.), des termes où i et k sont tous deux au plus égaux à r, d'autres termes où ils sont tous deux supérieurs à r, et enfin des termes où l'un de ces nombres est au plus égal, l'autre supérieur à r.

Soit $k \leq r$ et $i > r$; pour que la forme (4.) soit invariante, on devra avoir la somme

$$\sum_i c_{ik}\omega_i$$

(où k reste fixe, et i varie de $r+1$ à $2p$) elle-même invariante, c'est-à-dire que la somme précédente serait une fonction uniforme de y, et par suite un polynome (d'après la nature des singularités des Ω). Mais, si r a été bien choisi, c'est-à-dire répond bien à la connexion linéaire de la surface, il n'y a pas de combinaison linéaire des Ω, qui se réduise à un polynome en y, sauf le cas où tous les coefficients sont nuls. On a donc nécessairement

$$c_{ik} = 0 \qquad (k \leq r,\ i > r).$$

Par suite, dans la somme (4.), il y a deux catégories des termes, ceux qui dépendent des ω (et des v), et ceux qui dépendent des Ω (et des Y). Nous pouvons donc écrire cette somme sous la forme

$$(5.) \qquad \sum_{i,k} c_{ik}\omega_i v_k + \sum_{i',k'} c_{i',k'}\Omega_{i'} Y_{k'},$$

i et k varient de *un* à r, tandis que i' et k' varient de *un* à $2p-r$; on a toujours

$$c_{ik} = -c_{ki}, \qquad c_{i'k'} = -c_{k'i'}.$$

Le déterminant total des c dans (4.) était égal à l'unité. Or il est visiblement égal au produit des deux déterminants

$$|c_{ik}| \text{ et } |c_{i'k'}|.$$

Ceci exige que r soit *pair*, car un déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul. Nous avons donc ce théorème:

Le nombre r des intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce d'une surface algébrique est nécessairement pair.

4. Nous pouvons encore tirer des considérations précédentes une autre conséquence. Il est d'abord élémentaire qu'en effectuant sur les ω (et sur les v) une substitution à coefficients entiers et de déterminant *un*, on peut ramener la première somme figurant dans (5.) à la forme canonique

$$\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 + \cdots + \omega_{r-1} v_r - \omega_r v_{r-1},$$

et on peut avoir la forme canonique analogue pour la seconde somme. De là nous concluons le théorème suivant:

Avec les r cycles correspondant aux ω, *on peut faire* $\frac{r}{2}$ *rétrosections de Riemann*

$$(C_i, D_i), \qquad \left(i = 1, 2, \ldots \frac{r}{2}\right)$$

puis avec les $2p-r$ *cycles correspondant aux* Ω, *on peut faire* $p - \frac{r}{2}$ *rétrosections*

$$(C'_k, D'_k). \qquad \left(k = 1, 2, \ldots p - \frac{r}{2}\right)$$

Ce résultat précise bien la disposition de ces différents cycles, notamment des r premiers, qui, seuls, sont des cycles effectifs de la surface algébrique considérée.

5. De là, nous allons déduire une inégalité entre le nombre r des intégrales de différentielles totales de seconde espèce, et le nombre r_0 des

intégrales de différentielles totales de *première* espèce. Soient

$$I_1,\ I_2, \dots I_p$$

les p intégrales de première espèce de la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

les coefficients de dx, sous le signe d'intégration dans les I, étant rationnels en x, y et z.

Si la surface a des intégrales de différentielles totales de première espèce, on pourra trouver, d'après un raisonnement fait bien des fois, des fonctions rationnelles $a_1, a_2, \dots a_p$ de y, telles que l'intégrale abélienne

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_p I_p$$

relative à la courbe précédente, ait ses périodes indépendantes de y, et l'intégrale de différentielle totale aura cette forme pour $dy = 0$. Or, *pour une intégrale de première espèce*, on ne peut se donner que les périodes relatives à p cycles *appartenant à p rétrosections de Riemann*, soient ici les C_i et les C'_k. Mais pour les C'_k (et aussi les D'_k) qui ne sont pas des cycles effectifs de la surface, les périodes de toute intégrale de différentielle totale (de première ou de seconde espèce), sont nécessairement nulles. Nous pouvons donc, pour une intégrale de première espèce, nous donner tout au plus les $\frac{r}{2}$ constantes relatives aux C_i, *ce qui nous donne l'inégalité*

$$r_0 \leqq \frac{r}{2}$$

entre les deux nombres r et r_0.

M. *Castelnuovo*, dans un mémoire extrêmement remarquable,*) a établi récemment que l'on a effectivement

$$r_0 = \frac{r}{2}.$$

Nous reviendrons sur ce point dans un moment.

---

*) *G. Castelnuovo.* Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolari (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, mai et juin 1905).

II.

6. Nous allons établir une autre inégalité concernant le nombre r, et nous en déduirons un théorème intéressant concernant les adjointes des surfaces algébriques.

Il est nécessaire de rappeler d'abord quelques résultats relatifs aux surfaces algébriques. Pour notre surface f, les *adjointes* sont les surfaces passant par la courbe double. Dans son mémoire classique relatif à la géométrie sur les surfaces algébriques*) M. *Enriques* a considéré les adjointes d'ordre supérieur ou égal à $m-3$. Envisageons avec lui une adjointe d'ordre h ($h \geq m-3$); l'ensemble de ces adjointes forme un système linéaire de surfaces. Celui-ci découpe sur un plan pris arbitrairement un système linéaire de courbes planes qui font évidemment partie des adjointes d'ordre h de la section plane correspondante de la surface. Mais il se peut que ce système linéaire de courbes planes ne forme pas l'ensemble de ces adjointes, et qu'il y ait un *défaut* que nous désignerons par ω_h. On est assuré que, à partir d'une certaine valeur de h, tous les ω seront nuls. Supposons que de $h=m-3$ à $h=l-1$, les ω soient différents de zéro. M. *Enriques* a considéré la somme

$$\sum_{m-3}^{l-1} \omega_h$$

et établi le résultat très important**) qu'elle représente la différence

$$p_g - p_n$$

entre le *genre géométrique* p_g de la surface, et son genre numérique p_n. On sait que p_g et p_n sont deux *invariants absolus* de la surface. Une surface pour laquelle ces deux invariants sont égaux est dite *régulière*; c'est le cas *général*.

7. Ces résultats rappelés, faisons une remarque préliminaire relative aux courbes algébriques. Soit une courbe algébrique de genre p, dont nous considérons q intégrales distinctes de première espèce ($q \leq p$)

$$I_1, I_2, \ldots I_q;$$

---

*) *Enriques*, Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (Mem. della Societa italiana d. Scienze, tome X, 1896).

**) J'ai reproduit l'analyse de *M. Enriques* dans le tome II de ma Théorie des fonctions algébriques de deux variables (p. 88).

il est facile de montrer que le nombre de leurs périodes (dans leur ensemble), c'est-à-dire le nombre des périodes arithmétiquement distinctes d'une combinaison linéaire arbitraire de ces intégrales *ne peut être inférieur à* $2q$. Supposons en effet qu'il en soit autrement, et qu'il y ait seulement $2q-s$ périodes. On pourra avoir, pour les I, un tableau de périodes, correspondant à $2p$ cycles *distincts* de la courbe

$$\begin{array}{c|cccc} I_1 & a_{11}, & a_{12}, & \dots a_{1,2q-s}, & 0, 0, \dots 0 \\ I_2 & a_{21}, & a_{22}, & \dots a_{2,2q-s}, & 0, 0, \dots 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_q & a_{q,1}, & a_{q,2}, & \dots a_{q,2q-s}, & 0, 0, \dots 0 \end{array}$$

le nombre des *zéros*, dans chaque ligne, étant $2p-2q+s$. Si l'on prend maintenant d'autres intégrales de première espèce $I_{q+1}, \dots I_p$ formant avec $I_1, I_2, \dots I_q$ un système de p intégrales distinctes de la même espèce, le tableau des périodes se complètera par

$$\begin{array}{c|ccc} I_{q+1} & b_{q+1,1}, & b_{q+1,2}, & \dots b_{q+1,2p} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_p & b_{p,1}, & b_{p,2}, & \dots b_{p,2p} \end{array}.$$

Or, on sait que, étant donnée une courbe algébrique, on peut former une intégrale de première espèce lui appartenant, pour laquelle les parties *réelles* des périodes relatives à $2p$ cycles distincts ont des valeurs *arbitrairement choisies*; c'est là un point classique. Formons alors la combinaison

$$(6.) \qquad (\alpha_1 + i\beta_1) I_1 + \dots + (\alpha_p + i\beta_p) I_p.$$

On doit pouvoir choisir les constantes réelles α et β, de manière que les parties réelles des périodes de (6.) aient telles valeurs réelles que l'on voudra pour les $2p$ cycles correspondant aux $2p$ colonnes verticales du tableau ci-dessus. Mais, si l'on égale à

$$2p-2q+s$$

valeurs données les parties réelles des périodes correspondant aux $2p-2q+s$ dernières colonnes du tableau, on aura $2p-2q+s$ équations linéaires entre les inconnues

$$\alpha_{q+1}, \ \beta_{q+1}, \dots \alpha_p, \beta_p,$$

qui sont en nombre

$$2p-2q.$$

Le nombre des inconnues est inférieur de s au nombre des équations; ceci entraîne nécessairement des relations entre les parties réelles *données* des périodes, ce qui nous conduit à une contradiction. On ne peut donc supposer que s soit différent de zéro, ce qui établit le lemme.

8. Partons maintenant d'une surface f, en supposant que pour les adjointes d'ordre $m-3$, il y ait relativement aux sections planes le *défaut*

$$\omega_{m-3}$$

dont il a été parlé au paragraphe 6. Ceci revient à dire que les adjointes d'ordre $m-3$ de f découpent sur un plan arbitraire un système linéaire d'ordre $m-3$ dépendant de

$$p-\omega_{m-3}$$

paramètres arbitraires. Nous pouvons donc former $p-\omega_{m-3}$ intégrales distinctes de première espèce de la courbe entre x et z représentée par $f=0$, qui seront de la forme

$$(7.) \qquad \int \frac{Q_h(x,y,z)\,dx}{f'_z} \qquad (h=1,2,\dots p-\omega_{m-3})$$

où Q_h, polynome de degré $m-3$ en x, y et z, correspond à une adjointe d'ordre $m-3$ de la surface.

Les intégrales (7.) rentrent dans le type de celles dont nous nous sommes occupé dans la première section. Il y a r cycles distincts de la courbe, donnant des périodes disctinctes *qui doivent être des polynomes en* y. Or développons, dans le voisinage de $y=\infty$, une période d'ailleurs quelconque de (7.). Cela sera facile, en posant

$$x=x'y, \qquad z=z'y.$$

Soit, en groupant par termes homogènes,

$$f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)+\cdots,$$
$$Q_h(x,y,z)=q_h(x,y,z)+\cdots.$$

On voit de suite qu' une période quelconque de (7.), pour y très grand, est de la forme

(8.) $$\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{y^2}+\cdots$$

où α représente une période de l'intégrale

$$\int \frac{q_h(x', 1, z')dx'}{\varphi'_{z'}},$$

relative à la courbe

$$\varphi(x', 1, z')=0.$$

Considérons alors les r périodes de (7.), qui sont des polynomes en y. D'après la forme précédente (8.), ces polynomes sont nécessairement identiquement nuls. Nous sommes donc conduit à cette conclusion que les

$$p-\omega_{m-3}$$

intégrales distinctes (7.) de première espèce *ont r périodes nulles*. Elles ont donc seulement au plus

$$2p-r$$

périodes distinctes. Nous pouvons alors appliquer le lemme du paragraphe précédent; le nombre des périodes étant au moins double du nombre des intégrales, on a

$$2p-r \geqq 2(p-\omega_{m-3})$$

c'est-à-dire que l'on a l'inégalité

(9.) $$r \leqq 2\omega_{m-3}.$$

9. A la fin du § 5, nous avons énoncé le théorème de M. *Castelnuovo* d'après lequel

$$r_0=\frac{r}{2}.$$

M. *Castelnuovo* (loc. cit.) a en même temps établi que

$$r=2(p_g-p_n).$$

Ce résultat, rapproché de notre inégalité (9.), va nous conduire à un théorème curieux et assez inattendu.

D'après l'égalité de M. *Enriques*, rappelée au § 6

$$p_g-p_n=\sum_{m-3}^{l-1}\omega_h$$

on a nécessairement, puisque tous les ω sont positifs

$$p_g - p_n \geqq \omega_{m-3}. \tag{10.}$$

Rapprochons l'une de l'autre les inégalités (9.) et (10.).

On en conclut

$$r \leqq 2\,(p_g - p_n).$$

Mais, puisque $r = 2\,(p_g - p_n)$, *il faut nécessairement que l'on ait*

$$\omega_{m-3} = p_g - p_n.$$

*On en déduit que l'on a pour toute surface algébrique**)

$$\omega_h = 0. \qquad (h \geqq m-2)$$

Ainsi, dans le calcul du genre d'une surface algébrique, il n'y a que le défaut ω_{m-3} à envisager. *Les adjointes d'une surface d'ordre m, d'ordre supérieur ou égal à $m-2$ donnent sur un plan le système complet des adjointes du même ordre de la section plane.*

Ce résultat complète les belles recherches de M. *Enriques* sur les adjointes d'une surface algébrique. Nous l'obtenons par une voie détournée; il est, de sa nature, purement géométrique, et on pourra sans doute le démontrer directement en restant au point de vue de la géométrie des surfaces algébriques.

10. Indiquons en terminant, une conséquence du résultat précédent et du théorème de M. *Castelnuovo;* nous poserons, pour abréger,

$$\delta = \omega_{m-3} = p_g - p_n.$$

Cherchons la forme des intégrales de première espèce pour la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0.$$

Il y a d'abord $p - \delta$ intégrales distinctes de la forme

---

*) J'ai énoncé pour la première fois ce résultat et indiqué sommairement la démonstration dans les Comptes Rendus (Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre d'une surface algébrique, 3 juillet 1905).

$$(11.) \qquad \int \frac{Q_i(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots p - \delta)$$

où les Q correspondent à des adjointes d'ordre $m-3$ de la surface.

Quelle est la forme des δ autres intégrales de première espèce? Les surfaces adjointes d'ordre $m-2$ découpant sur une section plane le système complet des adjointes d'ordre $m-2$, découpent en particulier l'ensemble des adjointes d'ordre $m-2$ formé par une adjointe d'ordre $m-3$ et la droite de l'infini du plan. On aura donc δ autres intégrales de première espèce de la forme

$$(12.) \qquad \int \frac{P_k(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (k = 1, 2, \ldots \delta)$$

P_k étant un polynome s'annulant sur la courbe double, de degré $m-2$ en x, y et z, et de degré $m-3$ en x et z.

D'après le raisonnement du § 8, les périodes des intégrales (11.) relatives aux r cycles (C, D) sont nulles (puisqu'elles doivent être des polynomes s'annulant pour $y=\infty$); les $2p-r$ autres périodes ont, pour y très grand, leurs développements commençant par un terme en $\frac{1}{y}$.

Quant aux intégrales (12.), leurs périodes relatives aux r cycles (C, D) sont, d'après le même raisonnement, des constantes (puisqu'elles doivent être des polynomes de degré *zéro*). Le développement des $2p-r$ autres périodes suivant les puissances de $\frac{1}{y}$ commencera par un terme constant.

11. La surface a δ intégrales de différentielles totales de première espèce; celles-ci, quand on y fait $dy=0$, sont nécessairement des combinaisons linéaires des intégrales (11.) et (12.), les multiplicateurs étant pour les intégrales (11.) des polynomes du premier degré en y, et pour les intégrales (12.) des constantes. On peut donc supposer que les intégrales (12.) correspondent précisément aux intégrales de différentielles totales de première espèce de la surface; dans ces conditions le tableau des périodes des p intégrales (11.) et (12.) sera de la forme

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & \Omega_1^1 & \ldots & \Omega_{2p-r}^1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \Omega_1^2 & \ldots & \Omega_{2p-r}^2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \Omega_1^{p-\frac{r}{2}} & \ldots & \Omega_{2p-r}^{p-\frac{r}{2}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\frac{r}{2},1} & a_{\frac{r}{2},2} & \dots & a_{\frac{r}{2},r} & 0 & \dots & 0; \end{array}$$

les a sont des constantes, et représentent les périodes des $\frac{r}{2}$ intégrales de différentielles totales de première espèce. Les r premières colonnes correspondent aux cycles C et D, les $2p-r$ autres aux cycles C' et D'. On voit ainsi l'intéressant cas de *réduction* présenté par les intégrales de première espèce de la courbe entre x et z donnée par $f=0$.

Über die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte.

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.

In einer Arbeit*) habe ich die *Riemann*sche Aufgabe der Bestimmung einer algebraischen Funktion y der komplexen Variabeln x, die zu einer gegebenen *Riemann*schen Fläche mit den σ Verzweigungspunkten $a_1, \ldots a_\sigma$ gehört, auf algebraische Weise behandelt. Es ergab sich, daß die algebraische Lösung dieser Aufgabe nicht die gesuchte Funktion y allein, sondern zugleich die Gesamtheit aller jener algebraischen Funktionen liefert, die aus der gesuchten durch „Monodromie“ der Verzweigungspunkte hervorgehen, und daß diese Gesamtheit eine einzige monogene Funktion der $\sigma+1$ Variabeln $x, a_1, \ldots a_\sigma$ konstituiert, deren Zweige sich durch rein algebraische Hilfsmittel nicht von einander trennen lassen. Dieses Ergebnis setzt, wie mir scheint, den wesentlichen Fortschritt in Evidenz, den die *Riemann*sche Fragestellung gegenüber der auf die Betrachtung einer gegebenen algebraischen Gleichung zwischen y und x gegründeten Untersuchung mit sich bringt. — In der Theorie der linearen Differentialgleichungen steht der Untersuchung der durch eine gegebene Differentialgleichung definierten Funktionen mit Hilfe der von *Fuchs* begründeten Methoden die *Riemann*sche Fragestellung der Bestimmung eines Funktionssystems $y_1, \ldots y_n$ mit gegebenen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots a_\sigma$ und gegebenen Fundamentalsubstitutionen $A_1, \ldots A_\sigma$ gegenüber. — Auch hier führt die Auffassung *Riemann*s mit Notwendigkeit dazu, die gesuchten Funktionen nicht als Funktionen von x allein, sondern in ihrer Abhängigkeit von den $\sigma+1$ unabhängigen Variabeln $x, a_1, \ldots a_\sigma$ zu

*) Annales de l'École Normale (3), XX, 1903, S. 331 ff.

studieren, eine Frage, die ich namentlich in der zweiten meiner in diesem Journale dem *Riemann*schen Probleme gewidmeten Arbeiten*) erörtert habe. — Ich möchte hier einige weitere auf diese Frage bezugnehmende Entwickelungen mitteilen, die für die Theorie der linearen Differentialgleichungen das Analogon zu dem oben erwähnten Ergebnisse der Theorie der algebraischen Funktionen aufzufinden suchen. Möge die Aufnahme dieser noch sehr unvollständigen Bemerkungen in den dem Andenken *Lejeune-Dirichlet*s geweihten Band von dem Bewußtsein Zeugnis ablegen, daß diese und ähnliche Fragen aus dem Bestreben erwachsen sind, „funktionale Abhängigkeiten begrifflich zu fixieren“,**) und daß dieses Bestreben, in welchem wir seit *Riemann* den Grundzug modernen funktionentheoretischen Denkens erblicken, zuerst in den Methoden zur Geltung kommt, die *Dirichlet* für die Theorie des Potentials geschaffen hat.***)

I.

Die neuen Grundlagen, die ich im Anschlusse an ältere Arbeiten des Herrn *Volterra* für die Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme skizziert habe,†) gewähren die Möglichkeit, die Existenz der durch das *Riemann*sche Problem postulierten Funktionssysteme mit Hilfe der Kontinuitätsmethode zu erweisen.††) Sind also σ Fundamentalsubstitutionen $A_1, \ldots A_\sigma$ willkürlich vorgeschrieben, so können die von x unabhängigen Größen $A_{iz}^{(\nu)}$ in dem kanonischen Differentialsysteme

$$(A.) \qquad \frac{dy_z}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda z}, \qquad a_{iz} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{iz}^{(\nu)}}{x - a_\nu}, \qquad (i, z = 1, 2, \ldots n)$$

stets so bestimmt werden, daß bei willkürlicher Lage der singulären Punkte

*) Dieses Journal Bd. 124, S. 292 ff.

**) *Fuchs*, Rektoratsrede, Berlin 1900, 3. August, S. 13.

***) Vergl. *Fuchs*, a. a. O.

†) Dieses Journal Bd. 128, S. 263.

††) Dieser Beweis ist in meiner Arbeit, dieses Journal Bd. 130, S. 26 ff. (siehe namentlich S. 45) skizziert und in einer demnächst in den Mathem. Annalen erscheinenden Note „Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise der Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems (Aus einem Briefe an Herrn *D. Hilbert*)“ genauer ausgeführt. Kürzlich hat Herr *Hilbert* in den Göttinger Nachrichten 1905, Heft 4 einen Existenzbeweis für den Fall $n=2$ auf seine Theorie der linearen Integralgleichungen gegründet. Vergl. auch *O. D. Kellog*, Mathem. Annalen, Bd. 60, S. 424.

$a_1, \dots a_\sigma$ die Integralmatrix*)

$$(y_{ix}) = \int_{x_0}^{x} (a_{ix}\, dx + \delta_{ix}),$$

die sich für den regulären Punkt x_0 auf die Einheitsmatrix (δ_{ix}) reduziert, die vorgeschriebenen Substitutionen erfährt, wenn x die Querschnitte

$$l_\nu = (a_\nu, \infty) \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma)$$

im positiven Sinne überschreitet. Dabei ist die Integralmatrix (y_{ix}) auf einem Wege zu erstrecken, der ganz in der durch die Schnitte $l_1, \dots l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene verläuft, und die $A_{ix}^{(\nu)}$ sind *eindeutig* bestimmt, wenn man den Wurzeln der zu den singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Differentialsystems $(A.)$ feste, mit den gegebenen Substitutionen $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$ konkordierende Werte zuerteilt.

Betrachtet man die $a_1, \dots a_\sigma$ als unbeschränkt veränderliche Größen, die Elemente der $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$ als von diesen unabhängige Konstanten, so ergibt sich aus meiner Arbeit,**) daß die (y_{ix}), aufgefaßt als Funktionen der $a_1, \dots a_\sigma$, die folgenden Eigenschaften haben: Beschreiben die Punkte $a_1, \dots a_\sigma$ irgendwelche geschlossene Bahnen von der Beschaffenheit, daß keiner dieser Punkte auf seinem Wege den Integrationsweg der Integralmatrix (y_{ix}) durchkreuzt,***) so verwandelt sich (y_{ix}) in eine Matrix $(\bar{y}_{ix})$, die gewisse Substitutionen $\overline{\mathrm{A}}_1, \dots \overline{\mathrm{A}}_\sigma$ erfährt, wenn x die Querschnitte $l_1, \dots l_\sigma$ überschreitet, sich für $x = x_0$ auf (δ_{ix}) reduziert und ein Differentialsystem von der Form

$$(\bar{A}.) \qquad \frac{d\bar{y}_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{A}_{\lambda x}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (x = 1, 2, \dots n)$$

befriedigt. Die Substitutionen $\overline{\mathrm{A}}_1, \dots \overline{\mathrm{A}}_\sigma$ sind von der Form

$$(1.) \qquad \overline{\mathrm{A}}_\nu = C_\nu \mathrm{A}_\nu C_\nu^{-1}. \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma)$$

Die C_ν sind aus den $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$ und ihren inversen komponiert und ergeben sich, wenn die geschlossenen Bahnen, die jeder der Punkte $a_1, \dots a_\sigma$

---

*) Vergl. für die angewandten Bezeichnungen meine Arbeit, dieses Journal Bd. 128.

**) Dieses Journal Bd. 124, S. 292 ff. vergl. auch Bd. 130, S. 45.

***) Die Aufeinanderfolge der Schnitte $l_1, \dots l_\sigma$ bei einer Umkreisung des unendlich fernen Punktes bleibt nach den Festsetzungen, dieses Journal Bd. 124, S. 297 stets dieselbe.

beschrieben hat, bekannt sind, durch Anwendung der Formeln (7.), (7ª.) und (6.) meiner Arbeit,*) wobei jedoch die Formeln (6.) bei der jetzt festgehaltenen Vorstellung als die Änderungen zu interpretieren sind, die durch einen positiven Umlauf des Punktes a_λ um den unendlich fernen Punkt bewirkt werden.**) Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen der Differentialsysteme $(\bar{A}.)$ sind für alle singulären Punkte $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ dieselben wie für das System $(A.)$, die Werte $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, in welche die Funktionen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ von $a_1, \ldots a_\sigma$ durch die betrachteten geschlossenen Wege $a_1, \ldots a_\sigma$ verwandelt worden sind, können demnach als durch das mit den neuen Fundamentalsubstitutionen $\bar{\mathrm{A}}_1, \ldots \bar{\mathrm{A}}_\sigma$ gebildete *Riemann*sche Problem bestimmt angesehen werden. In bezug auf die Gesamtheit der Differentialsysteme $(\bar{A}.)$,***) die so aus einander durch „Monodromie der Verzweigungspunkte" $a_1, \ldots a_\sigma$ hervorgehen (wobei die Bedingung, daß die Bahnen der $a_1, \ldots a_\sigma$ den Integrationsweg $(x_0 \ldots x)$ nicht durchkreuzen sollen, vorläufig festgehalten werden möge), läßt sich nun weiter das Folgende feststellen.

Die erwähnten Formeln (7.), (7 a.), (6.) meiner Arbeit†) zeigen, daß die $\bar{\mathrm{A}}_1, \ldots \bar{\mathrm{A}}_\sigma$ ein System von Fundamentalsubstitutionen derselben Gruppe Θ bilden, die aus den $\mathrm{A}_1, \ldots \mathrm{A}_\sigma$ komponiert ist, daß also alle Differentialsysteme $(\bar{A}.)$ dieselbe Monodromiegruppe Θ haben. Eine einfache Überlegung zeigt aber auch, daß die Systeme (1.) die allgemeinsten Systeme von σ Fundamentalsubstitutionen der Gruppe Θ darstellen, welche mit einander *ähnlich* sind, d. h. für welche jedes $\bar{\mathrm{A}}_\nu$ aus dem entsprechenden A_ν und auch

$$\bar{\mathrm{A}}_{\sigma+1} = \bar{\mathrm{A}}_1^{-1} \ldots \bar{\mathrm{A}}_\sigma^{-1}$$

aus

$$\mathrm{A}_{\sigma+1} = \mathrm{A}_1^{-1} \ldots \mathrm{A}_\sigma^{-1}$$

durch Transformation mit einer Substitution der Gruppe Θ hervorgeht. Wenn wir jetzt auch solche geschlossene Bahnen der $a_1, \ldots a_\sigma$ zulassen, die den Integrationsweg $(x_0 \ldots x)$ durchkreuzen, so wird bei solchen Bahnen die Inte-

*) Dieses Journal Bd. 124, S. 302, 301.

**) Durch einen solchen Umlauf, dem nach den zitierten Formeln (6.) $\bar{\mathrm{A}}_\varkappa = \mathrm{A}_\lambda \mathrm{A}_\varkappa \mathrm{A}_\lambda^{-1}$ entspricht, verwandelt sich $(y_{i\varkappa})$ in $(\bar{y}_{i\varkappa}) = \mathrm{A}_\lambda (y_{i\varkappa}) \mathrm{A}_\lambda^{-1}$ (vergl. dieses Journal Bd. 130, S. 45, wo Zeile 8 und 2 v. u. ∞ an Stelle von x zu setzen ist).

***) Eine Gesamtheit, der natürlich auch das Differentialsystem $(A.)$ selbst angehört.

†) Dieses Journal Bd. 124, S. 302.

gralmatrix (y_{ix}) in Matrizen verwandelt werden, deren Anfangswerte in x_0 nicht mehr (δ_{ix}), sondern die Elemente irgend einer Substitution der Gruppe Θ sind. Und zwar wird,*) wenn a_λ einen positiven Umlauf um x vollzieht, (y_{ix}) in $\mathrm{A}_\lambda (y_{ix})$ verwandelt, wogegen ein positiver Umlauf von a_λ um x_0 die Integralmatrix (y_{ix}) in $(y_{ix})\ \mathrm{A}_\lambda^{-1}$ überführt.**) Bei dem Umlaufe um x erfahren die Koeffizienten des Differentialsystems $(A.)$ keine Änderung, beim Umlaufe um x_0 dagegen werden die Matrizen $(A_{ix}^{(r)})$ in $\mathrm{A}_\lambda (A_{ix}^{(r)}) \mathrm{A}_\lambda^{-1}$ transformiert, erfahren also dieselbe Änderung wie beim Umlaufe von a_λ um den unendlich fernen Punkt. Die Gesamtheit der Differentialsysteme $(\bar{A}.)$ enthält demnach alle Differentialsysteme, die aus $(A.)$ durch *unbeschränkte* Monodromie der Verzweigungspunkte hervorgehen, d. h. wir können sagen:

Die Gesamtheit der Differentialsysteme $(\bar{A}.)$, die aus einander durch Monodromie der Verzweigungspunkte hervorgehen, löst das Problem der Bestimmung eines Differentialsystems von der kanonischen Form mit σ wesentlich singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma$ und festen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen, dessen Monodromiegruppe für die sich in $x = x_0$ auf (δ_{ix}) reduzierende Integralmatrix $(\bar{y}_{ix})$ die gegebene Gruppe Θ ist. Die Gesamtheit aller dieser Integralmatrizen $(\bar{y}_{ix})$ und der aus ihnen durch beliebige geschlossene Wege von x hervorgehenden konstituiert eine einzige monogene Funktionsmatrix der $\sigma + 1$ unabhängigen Variabeln $x, a_1, \dots a_\sigma$, für die

$$x = a_\nu, \quad a_\lambda = a_\nu, \quad a_\nu = \infty, \quad x = \infty, \quad a_\nu = x_0 \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \dots, \sigma)$$

die einzigen singulären Gebilde darstellen.

Wir erkennen in diesem Satze das Analogon des in der Einleitung erwähnten Ergebnisses der Theorie der algebraischen Funktionen, und gewinnen durch denselben zugleich vollständige Einsicht in die Natur des von

---

*) Dieses Journal Bd. 124, S. 301.

**) Das Auftreten des singulären Punktes x_0, wenn (y_{ix}) als Funktionsmatrix der $a_1, \dots a_\sigma$ aufgefaßt wird, liegt daran, daß wir (y_{ix}) so normiert haben, daß es sich im Punkte x_0 auf die (von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängige) Matrix (δ_{ix}) reduziert. Durch Rechtskomposition von (y_{ix}) mit einer geeigneten von x unabhängigen Matrix kann dieser singuläre Punkt in jede andere Stelle x_1 verlegt werden. Bedeutet z. B. (z_{ix}) eine Matrix, die sich für $x = x_1$ auf (δ_{ix}) reduziert und im übrigen dieselben Eigenschaften hat, wie (y_{ix}), so ist $(y_{ix}) = (z_{ix})\,(z_{ix})_{x_0}^{-1}$. Vollzieht a_λ einen positiven Umlauf um x_0, so bleibt (z_{ix}) ungeändert, während $(z_{ix})_{x_0}$ von links her die Substitution A_λ erfährt; (y_{ix}) verwandelt sich also in der Tat, wie oben angegeben, in $(y_{ix})\ \mathrm{A}_\lambda^{-1}$.

dem *Riemann*schen *wesentlich verschiedenen* Problems der Bestimmung einer Differentialgleichung (bezw. eines Differentialsystems) der *Fuchs*schen Klasse, deren Monodromiegruppe gegeben ist. Da für eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse durch die Monodromiegruppe zugleich die Transformationsgruppe bestimmt ist,*) so hängt das letzterwähnte Problem aufs engste mit der Aufgabe zusammen, eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse zu bestimmen, deren Transformationsgruppe gegeben ist.

II.

Die eben skizzierten Erwägungen wecken den Wunsch, in die analytische Natur der $A_{ix}^{(\nu)}$ als Funktionen der $a_1, \dots a_\sigma$ tiefere Einsicht zu gewinnen. Wir betrachten dabei das Differentialsystem $(A.)$ bloß unter der Voraussetzung, daß die Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix (y_{iz}) von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängig sind, belassen also den $A_{ix}^{(\nu)}$ ihre ganze Vieldeutigkeit als Funktionen der $a_1, \dots a_\sigma$. Nach einem Satze, den ich in meiner Arbeit**) bewiesen habe, deckt sich diese Voraussetzung im wesentlichen mit der, daß die Monodromiegruppe des Differentialsystems $(A.)$ von irgend einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig sein soll, ein Fall, auf den *Fuchs* zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt***) und den er in einer Reihe von Arbeiten†) nach allen Seiten hin untersucht hat. Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, daß die zu den singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ gehörigen Fundamentalgleichungen lauter von einander verschiedene Wurzeln haben; bezeichnen wir dann mit $r_i^{(\nu)}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ die Wurzeln der zu $x = a_\nu$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung, so lautet die zu diesem singulären Punkte gehörige Integralmatrix:

$$(1.) \qquad (\eta_{iz}^{(\nu)}) = \left((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{iz}^{(\nu)}\right), \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma, \sigma + 1)$$

wo für $a_{\sigma+1} = \infty$ an die Stelle von $x - a_{\sigma+1}$ zu setzen ist $\frac{1}{x}$, und wo die $\varphi_{iz}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante $|\varphi_{iz}^{(\nu)}|$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet.

---

*) Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen Bd. II, 1 (1896). S. 101.
**) Dieses Journal Bd. 123, S. 171, 172.
***) Berliner Sitzungsberichte, 1888, S. 1278.
†) Ebenda 1889—1901.

Setzen wir dann

$$(2.) \qquad (y_{ix}) = (c_{ix}^{(\nu)})\,(\eta_{ix}^{(\nu)}),$$

so folgt daraus, daß die Substitution, welche (y_{ix}) beim Umlaufe um a_ν erleidet, von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängig sein sollte, daß die konstante Matrix $(c_{ix}^{(\nu)})$ ebenfalls von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängig gewählt werden kann.*) Umgekehrt ist, wenn alle $(c_{ix}^{(\nu)})$ von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängig sind, und das gleiche für die Wurzeln aller determinierenden Fundamentalgleichungen gilt, auch die zu (y_{ix}) gehörige Monodromiegruppe von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängig.

Aus der Darstellung

$$(3.) \qquad (a_{ix}) = \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\Big) = (y_{ix})^{-1}\Big(\frac{dy_{ix}}{dx}\Big) = \mathrm{D}_x(y_{ix})$$

folgt mit Rücksicht auf (1.) und (2.):**)

$$(4.) \qquad (A_{ix}^{(\nu)}) = (\varphi_{ix}^{(\nu)})_{a_\nu}^{-1}\,(r_i^{(\nu)}\delta_{ix})\,(\varphi_{ix}^{(\nu)})_{a_\nu}.$$

Wir bilden nun

$$\mathrm{D}_{a_\lambda}(y_{ix}) = (y_{ix})^{-1}\Big(\frac{\partial y_{ix}}{\partial a_\lambda}\Big) = (b_{ix}^{(\lambda)}), \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$$

dann gilt für die $b_{ix}^{(\lambda)}$ als Funktionen von x in der Umgebung von $x = a_\lambda$ die Darstellung:

$$(b_{ix}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ix}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{-r_i^{(\lambda)}\delta_{ix}}{x - a_\lambda}\Big)(\varphi_{ix}^{(\lambda)}) + (\varphi_{ix}^{(\lambda)})^{-1}\Big(\frac{\partial \varphi_{ix}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\Big).$$

Die $(b_{ix}^{(\lambda)})$ besitzen also im Punkte $x = a_\lambda$ einen Pol erster Ordnung, und es ist

$$(\mathrm{Res}_{a_\lambda}\, b_{ix}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ix}^{(\lambda)})_{a_\lambda}^{-1}\,(-\,r_i^{(\lambda)}\,\delta_{ix})\,(\varphi_{ix}^{(\lambda)})_{a_\lambda} = -\,(A_{ix}^{(\lambda)}),$$

also

$$(5.) \qquad b_{ix}^{(\lambda)} = \frac{-A_{ix}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda} + B_{ix}^{(\lambda)},$$

wo $B_{ix}^{(\lambda)}$ jedenfalls in der Umgebung von $x = a_\lambda$ holomorph ist. In der Umgebung von $x = a_\nu$, wo $\nu \neq \lambda$, und in der Umgebung von $x = \infty$ haben wir aber

$$(b_{ix}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ix}^{(\nu)})^{-1}\Big(\frac{\partial \varphi_{ix}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda}\Big); \qquad (\nu = 1, \dots \lambda - 1, \lambda + 1, \dots \sigma, \sigma + 1)$$

---

*) *Fuchs*, a. a. O. 1892, S. 163.

**) Vergl. meinen zu Beginn der Nr. I zitierten Brief an Herrn *Hilbert*, Mathem. Annalen.

die $b_{ix}^{(\lambda)}$ sind folglich in der Umgebung jeder von a_λ verschiedenen Stelle a_ν und in der Umgebung von $x=\infty$ holomorph, das gleiche gilt folglich von den $B_{ix}^{(\lambda)}$, *sodaß sich die letzteren Größen als von x unabhängig erweisen.* — Die Gleichungen (5.) enthalten so einen neuen Beweis des für diese Art von Betrachtungen grundlegenden *Fuchs*schen Satzes.*)

Zwischen den a_{ix} und den $b_{ix}^{(\lambda)}$ müssen**) die Integrabilitätsbedingungen

$$\left(\frac{\partial a_{ix}}{\partial a_\lambda}\right)+(b_{iz}^{(\lambda)})\,(a_{ix})=\left(\frac{\partial b_{ix}^{(\lambda)}}{\partial x}\right)+(a_{iz})\,(b_{iz}^{(\lambda)})$$

bestehen. Setzen wir hierin für a_{ix}, $b_{ix}^{(\lambda)}$ ihre Ausdrücke ein, so erhalten wir

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{\partial A_{ix}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda}\,\frac{1}{x-a_\nu}+\frac{A_{iz}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2}\right)+\left(\frac{-A_{ix}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda}+B_{ix}^{(\lambda)}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{iz}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)=\left(\frac{A_{ix}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2}\right)$$
$$+\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{iz}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\left(\frac{-A_{ix}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda}+B_{iz}^{(\lambda)}\right).$$

In diesen Gleichungen heben sich zunächst die Glieder mit dem Nenner $(x-a_\lambda)^2$ heraus; zerlegt man noch die mit dem Nenner $(x-a_\lambda)\,(x-a_\nu)$ behafteten Glieder in Partialbrüche, so erhält man n^2 Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{M_\nu}{x-a_\nu}=0,$$

wo nun alle M_ν verschwinden müssen. Die Ausführung dieser überaus einfachen Rechnung ergibt die Gleichungen:

$$(6.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial A_{iz}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}=\sum\limits_{\mathfrak{a}=1}^{n}\Big(\sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{\sigma}\dfrac{A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}x}^{(\nu)}-A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}A_{\mathfrak{a}z}^{(\lambda)}}{a_\lambda-a_\nu}+B_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}x}^{(\lambda)}-A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}B_{\mathfrak{a}z}^{(\lambda)}\Big),\\ \dfrac{\partial A_{ix}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda}=\sum\limits_{\mathfrak{a}=1}^{n}\Big(\dfrac{A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}x}^{(\nu)}-A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}A_{\mathfrak{a}z}^{(\lambda)}}{a_\nu-a_\lambda}+B_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}x}^{(\nu)}-A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}B_{\mathfrak{a}x}^{(\lambda)}\Big).\end{cases}$$
$$(i,z=1,2,\ldots n,\quad \lambda,\nu=1,2,\ldots\sigma,\quad \nu\neq\lambda)$$

Das Bestehen dieser Gleichungen ist *notwendig* und offenbar *auch hinreichend* dafür, daß in dem Differentialsysteme (*A.*) die Monodromiegruppe einer Integralmatrix von den $a_1,\ldots a_\sigma$ unabhängig ist. Auf eine Diskussion dieser Gleichungen möchte ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen.

---

*) Berliner Sitzungsberichte 1888, Nr. 12, S. 1279 ff.

**) Vergl. *Fuchs*, a. a. O. 1898, S. 226.

Über die Anziehung hyperboloidischer Schalen.

Von Herrn *E. Steinitz* in Berlin.

Die Aufgabe, die Anziehung eines homogenen Ellipsoids zu bestimmen, hat wie kaum ein anderes spezielles Problem der Potentialtheorie das Interesse der bedeutendsten Mathematiker auf sich gelenkt. *Laplace* gab die erste vollständige Lösung, andere Lösungen von *Ivory*, *Gauss*, *Dirichlet* folgten. Alle diese Mathematiker verfuhren durchaus analytisch, dagegen hat *Chasles* durch sehr elegante, wesentlich synthetisch-geometrische Betrachtungen das Problem bewältigt.

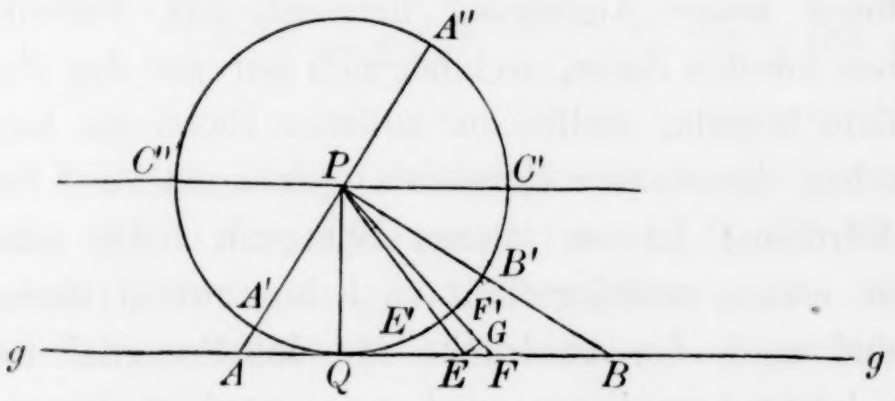
Es sind bei *Chasles* insbesondere zwei Sätze, von denen aus die ganze Theorie leicht beherrscht wird. Sie beziehen sich auf eine Masse, welche innerhalb des von zwei homothetischen, d. h. konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten Raumes homogen ausgebreitet ist — eine ellipsoidische Schale, wie wir kurz sagen wollen. Der erste, schon von *Newton* gefundene Satz besagt, daß innerhalb des von der Schale umschlossenen Raumes keine Anziehung herrscht, das Potential also konstant ist. Nach dem zweiten Satze, welcher sich nur auf den Fall einer unendlich dünnen Schale bezieht, stellen im äußeren Raum die konfokalen Ellipsoide die Flächen konstanten Potentials (Niveauflächen) dar. *Chasles'* hauptsächlichstes Verdienst ist es, diesen Satz mit Hilfe eines Theorems von *Ivory* auf den ersten zurückgeführt zu haben. Sind einmal diese Sätze bewiesen, so sind auch die Ausdrücke für das Potential und die Anziehung der Schale leicht herzuleiten, und man gewinnt die entsprechenden Formeln für das Vollellipsoid, indem man dieses in ellipsoidische Schalen zerlegt.

Das hier in Rede stehende Problem ist später in mannigfacher Weise verallgemeinert bzw. erweitert worden. So wurden entsprechende Unter-

suchungen für mehrdimensionale und nicht-euklidische Räume durchgeführt, man hat die Homogeneität durch allgemeinere Voraussetzungen über die Dichtigkeit ersetzt, man hat endlich statt des *Newton*schen Anziehungsgesetzes andere zugrunde gelegt. Dagegen scheint die sehr naheliegende Ausdehnung der Untersuchung auf andere Flächen zweiten Grades noch nicht durchgeführt worden zu sein. Dies soll nun im folgenden geschehen; es wird sich dabei insbesondere um die Analoga der beiden oben angegebenen Sätze handeln, welche bei *Chasles* im Vordergrunde stehen. Der Umstand, daß hier Massen betrachtet werden, die sich ins Unendliche erstrecken, läßt die Zulässigkeit mancher in den Rechnungen vorkommenden Operationen nicht ohne weiteres erkennen. Die Rechtfertigung derselben wird, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, nachträglich (in §§ 6, 7) gegeben. Um ferner den Gedankengang durchsichtiger zu gestalten, schicke ich der Behandlung des eigentlichen Problems einige Betrachtungen über die Anziehung und das Potential einer gleichmäßig mit Masse belegten Geraden voran, welche für mich selbst den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen gebildet haben.

1. *Anziehung und Potential einer homogenen Geraden.*

In einer Ebene sei eine Gerade g und ein Punkt P angenommen (siehe Figur) und um P der Kreis beschrieben, welcher die Gerade berührt. Q sei der Berührungspunkt. Durch Strahlen von P aus seien die Punkte der Geraden und die des Kreises perspektiv auf einander bezogen. Sind alsdann EF und $E'F'$ zwei entsprechende Linienelemente von Gerade und Kreis und trifft der mit PE um P beschriebene Kreis die Strecke PF in G, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EFG und PEQ die Proportion $EF:EG=PE:PQ=PE:PE'$. Ferner ist $EG:E'F'=PE:PE'$, und es wird daher



$$EF:E'F'=\overline{PE}^2:\overline{PE'}^2.$$

Entsprechende Linienelemente verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Abstände von P, sie werden demnach, wenn mit Masse von derselben Dichtigkeit belegt, auf P dieselbe Anziehung nach Richtung und Größe ausüben. Hieraus kann man die folgenden Schlüsse ziehen:

1. Wird eine endliche Strecke AB der Geraden mit Masse von konstanter Dichtigkeit k belegt, so ist die auf P ausgeübte Anziehung dieselbe wie diejenige des mit derselben Dichtigkeit belegten Bogens $A'B'$, welcher von den Strecken PA und PB begrenzt wird. Hiernach ist evident, daß die Strecke AB auf jeden Punkt P eine Kraft ausübt, welche in die Halbierende des Winkels APB fällt, daß daher die Kraftlinien Hyperbeln mit den Brennpunkten A und B werden. Die Linien gleichen Potentials müssen die Kraftlinien senkrecht durchsetzen, sie bilden daher die zugehörige Schar konfokaler Ellipsen.

2. Es sei PC' der in Richtung AB gezogene Radius des Kreises. — Die unendlich lange rechts von B befindliche Strecke der Geraden g, mit der Dichtigkeit k belegt, ist in ihrer Wirkung auf P durch den in gleicher Weise belegten Bogen $B'C'$ ersetzbar. Die Kraft, welche sie auf irgendeinen Punkt P ausübt, wirkt daher in der Halbierenden des Winkels, welcher von PB und der durch P in Richtung der unendlich langen Strecke gezogenen Geraden gebildet wird. Die Kraftlinien bilden eine Schar konfokaler Parabeln mit g als Achse, B als Brennpunkt, welche sich nach links ins Unendliche erstrecken.

3. Es seien A'' und C'' die den Punkten A' und C' gegenüberliegenden Punkte des Kreises. Wird die links von A liegende unendlich lange Strecke von g mit der Dichtigkeit $-k$ belegt, d. h. mit einem Agens von entsprechender abstoßender Wirkung, so ist die auf P ausgeübte Wirkung dieselbe wie diejenige des mit der Dichtigkeit $-k$ belegten Bogens $C''A'$ oder auch des mit der Dichtigkeit $+k$ belegten Bogens $C'A''$. Wir belegen nun die Gerade g rechts von B mit der Dichtigkeit $+k$, links von A mit der Dichtigkeit $-k$, (während AB frei bleibt). Die auf P ausgeübte Kraft wird dann mit derjenigen übereinstimmen, welche der mit der Dichtigkeit k belegte Bogen $B'A''$ auf P ausübt. Sie wird also in die Halbierende des Winkels $B'PA''$, des Nebenwinkels von APB fallen. Für die hier betrachtete Belegung werden daher die Kraftlinien die konfokalen Ellipsen mit den Brennpunkten A und B werden.

Sucht man nun aber das Potential der Massenbelegung durch das

Integral $\int \frac{dm}{r}$ zu bestimmen, so sieht man leicht, daß dieses im Falle 2. positiv unendlich wird, im Falle 3. aus einem positiven und einem negativen unendlichen Teil zusammengesetzt, also völlig unbestimmt ist. Daraus folgt jedoch nicht, daß in den Fällen 2. und 3. keine Potentialfunktion existiert, d. h. eine Funktion, deren Ableitungen die Kraftkomponenten darstellen. Solche Funktionen sind auch hier vorhanden und natürlich bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt; nur die unmittelbare Darstellung durch das Integral $\int \frac{dm}{r}$ versagt, und man kann auch nicht, wie bei Massen von endlicher Ausdehnung, die willkürliche Konstante so wählen, daß die Funktion im Unendlichen verschwindet; sie wird vielmehr daselbst entweder unendlich oder unbestimmt. Um zu einer solchen Funktion zu gelangen, kann man zunächst das Integral für die Potentialdifferenz zweier Punkte P und P' in gewöhnlicher Weise ansetzen, also den Ausdruck

$$\int dm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)=\int \frac{r'-r}{rr'}\,dm,$$

wo r und r' die Abstände des jeweiligen Massenelementes dm von P und P' bezeichnen. Man überzeugt sich nun leicht, daß dieses Integral auch in den Fällen 2. und 3. einen bestimmten Wert hat. Betrachtet man sodann P' als festen, P als veränderlichen Punkt, so erhält man durch Differentiation nach den Koordinaten x, y von P die Integrale $\int dm \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$, $\int dm \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}$, also die bekannten Ausdrücke für die Kraftkomponenten. Das Integral $\int dm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$ stellt somit eine Potentialfunktion dar, und zwar diejenige, welche in P' verschwindet. Ist einmal die Existenz einer Potentialfunktion erwiesen, so folgt weiter, daß die Linien konstanten Potentials die Kraftlinien senkrecht durchsetzen. Im Falle 2. erhalten wir daher als Niveaulinien die Schar konfokaler Parabeln mit B als Brennpunkt g als Achse, welche sich nach rechts ins Unendliche erstrecken; im Falle 3. die Schar konfokaler Hyperbeln mit den Brennpunkten A und B.

2. *Das zweischalige Hyperboloid.*

Betrachten wir die Gerade g im Raume, so können wir die gefundenen Resultate mit geringfügiger Abänderung der Bezeichnung folgendermaßen

aussprechen: *Wird g von einem festen Punkte A aus mit Masse von der konstanten Dichtigkeit k belegt und wird diese Massenbelegung kontinuierlich fortgesetzt, sodaß der Endpunkt B derselben weiter und weiter rückt, so treten als Niveauflächen zunächst Rotationsellipsoide mit den Brennpunkten A und B auf. Dieselben gehen, wenn B ins Unendliche rückt, in Rotationsparaboloide über. Wenn sodann B, von der andern Seite aus dem Unendlichen kommend, seinen Weg fortsetzt, wobei jedoch die Massenbelegung auf dieser Seite bis B mit der Dichtigkeit $-k$ fortzusetzen ist, so gehen die Niveauflächen in Rotationshyperboloide mit den Brennpunkten A und B über.*

Dies legt die Vermutung nahe, daß die für ellipsoidische Schalen geltenden Sätze auch für elliptisch-paraboloidische und zweischalig-hyperboloidische ihre Gültigkeit behalten, sofern im letzten Falle die Masse der einen Schale entsprechend negativ genommen wird. In der Tat läßt sich der Nachweis für diese Sätze in derselben Weise führen, wie dies *Chasles* für elliptische Schalen getan hat.

Der Nachweis des ersten Satzes beruht auf dem folgenden, für alle Flächen zweiten Grades geltenden Hilfssatze: Zwei homothetische Flächen zweiten Grades haben dasselbe System von konjugierten Durchmessern und Durchmesserebenen, daher fallen die Mittelpunkte der auf irgend einer Geraden von den beiden Flächen ausgeschnittenen Sehnen zusammen oder, mit anderen Worten, die vier Schnittpunkte liegen so, daß der Abstand der beiden ersten gleich dem der beiden letzten ist.

Nehmen wir nun, um einen bestimmten Fall zu haben, den des zweischaligen Hyperboloids. Wir gehen also von zwei solchen homothetischen Hyperboloiden aus, deren Hauptachse von links nach rechts gerichtet sein möge. Den Raum zwischen den beiden rechten Hyperboloidhälften denken wir uns mit Masse von der Dichtigkeit $+k$, den zwischen den beiden linken Hälften mit Masse von der Dichtigkeit $-k$ erfüllt. Der von Masse freie Raum zerfällt dann in drei Gebiete, ein *mittleres* von beiden Schalen begrenztes Gebiet und rechts und links zwei von je einer Schale umgrenzte *Seitengebiete*. O sei ein Punkt innerhalb eines der beiden letzteren. Dann ist zu zeigen, daß in O keine Anziehung stattfindet. Zu diesem Zweck nehmen wir einen Kegel von unendlich kleiner Öffnung mit O als Scheitel an. Derselbe schneidet aus der Masse zwei röhrenförmige Stücke aus, welche nach dem Hilfssatz gleiche Länge l besitzen. Für die von diesen Stücken auf O ausgeübten Kräfte ergeben sich durch leichte Überlegung gleiche absolute

Werte, nämlich $k \cdot l \cdot d\omega$, wenn $d\omega$ das von dem Kegel aus der um O beschriebenen Einheitskugel ausgeschnittene Flächenstück bezeichnet. Nun liegen die beiden röhrenförmigen Stücke entweder auf verschiedenen Seiten von O; dann gehören beide derselben Schale an und wirken daher beide anziehend oder beide abstoßend. Oder aber die beiden Stücke liegen auf derselben Seite von O; dann gehört eines der positiven Schale an und zieht an, das andere der negativen und stößt ab. In beiden Fällen heben sich die Wirkungen auf. Hieraus wird ersichtlich, daß sich die sämtlichen auf O ausgeübten Kräfte gegenseitig vernichten. Damit ist der erste Satz bewiesen.

Es sei jetzt

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1 \tag{1.}$$

die Gleichung der einen die Masse begrenzenden Fläche zweiten Grades. Wenden wir auf die Masse die affine Transformation

$$x'=a\,x,\ y'=b\,y,\ z'=c\,z \qquad (a, b, c \text{ positiv})$$

an, d. h. denken wir uns jedes Massenteilchen von seiner ursprünglichen Stelle (x, y, z) an die ihm durch die Transformation zugewiesene Stelle (x', y', z') versetzt, so wird auch nach dieser Transformation die Masse von homothetischen Flächen begrenzt und homogen, nämlich von der Dichtigkeit $\pm\frac{k}{a\,b\,c}$ sein. Nehmen wir die beiden homothetischen Flächen unendlich nahe bei einander an, so wird die unendlich kleine Dicke der Schale an jeder Stelle proportional sein dem Produkt aus dem (vom Mittelpunkt ausgehenden) Radius vector r in den Cosinus des Winkels ν, welchen dieser Radius mit der Flächennormale bildet. Es kommt dann auf dasselbe hinaus, wenn wir statt von einer unendlich dünnen Schale von einer mit Masse belegten Fläche sprechen, wobei aber die Flächendichte ϱ nicht mehr konstant, sondern proportional $r \cdot \cos\nu$ ist. Diese Größe ist auch proportional dem Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt. Eine derartige Flächenbelegung soll fortan kurz als eine *homothetische* bezeichnet werden.

Wir wenden nun die affine Transformation

$$x_t=\sqrt{\frac{\alpha+t}{\alpha}}\cdot x,\quad y_t=\sqrt{\frac{\beta+t}{\beta}}\cdot y,\quad z_t=\sqrt{\frac{\gamma+t}{\gamma}}\cdot z \tag{2.}$$

auf die homothetisch belegte Fläche (1.) an, wodurch dieselbe in die konfokale Fläche F_t mit der Gleichung

$$\frac{x_t^2}{\alpha+t}+\frac{y_t^2}{\beta+t}+\frac{z_t^2}{\gamma+t}=1 \tag{3.}$$

übergeht. t ist dabei eine reelle Zahl und nur der Beschränkung unterworfen, daß die Quotienten $\frac{\alpha+t}{\alpha}$, $\frac{\beta+t}{\beta}$, $\frac{\gamma+t}{\gamma}$ positiv sein müssen. Die in (2.) auftretenden Wurzeln aus diesen Quotienten sind positiv zu nehmen. Betrachten wir ferner t als eine innerhalb der zulässigen Grenzen kontinuierlich veränderliche Größe — die Zeit —, so stellt die Transformation (2.) eine kontinuierliche Bewegung der Masse dar; diese bildet beständig die homothetische Belegung einer Fläche, welche die konfokale Schar (3.) durchläuft. Das Symbol F_t verwenden wir sowohl zur Bezeichnung der geometrischen Fläche als auch zur Bezeichnung ihrer materiellen Belegung. Für $t=0$ erhalten wir unter der Bezeichnung F_0 die Fläche, von welcher wir ausgingen.

Sind jetzt $P=(x,y,z)$, $P'=(x',y',z')$ zwei Punkte von F_0, $P_t=(x_t,y_t,z_t)$, $P_t'=(x_t',y_t',z_t')$ die ihnen vermöge der Gleichungen (2.) entsprechenden Punkte von F_t, so sind nach dem *Ivory*schen Satze die Strecken $\overline{PP_t'}$ und $\overline{P'P_t}$ einander gleich. Man erhält nämlich unter Berücksichtigung von (1.), (2.), (3.)

$$\overline{PP_t'}^2=(x_t'-x)^2+(y_t'-y)^2+(z_t'-z)^2=\Big(\sqrt{\frac{\alpha+t}{\alpha}}\,x'-x\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{\beta+t}{\beta}}\,y'-y\Big)^2$$
$$+\Big(\sqrt{\frac{\gamma+t}{\gamma}}\,z'-z\Big)^2=x'^2+y'^2+z'^2+x^2+y^2+z^2$$
$$-2\Big(\sqrt{\frac{\alpha+t}{\alpha}}\,xx'+\sqrt{\frac{\beta+t}{\beta}}\,yy'+\Big(\sqrt{\frac{\gamma+t}{\gamma}}\,zz'\Big)$$
$$+t\Big(\frac{x'^2}{\alpha}+\frac{y'^2}{\beta}+\frac{z'^2}{\gamma}\Big)=x'^2+y'^2+z'^2+x^2+y^2+z^2$$
$$-2\Big(\sqrt{\frac{\alpha+t}{\alpha}}\,xx'+\sqrt{\frac{\beta+t}{\beta}}\,yy'+\sqrt{\frac{\gamma+t}{\gamma}}\,zz'\Big)+t;$$

und da dieser letzte Ausdruck sich nicht ändert, wenn man gestrichene und ungestrichene Buchstaben vertauscht, so folgt $\overline{PP_t'}=\overline{P'P_t}$. Bezüglich der materiellen Fläche F_t haben die beiden Punkte P, P' eine Potentialdifferenz, welche durch das über F_t zu erstreckende Integral $\int_{F_t} dm_t\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$ dargestellt wird, wo r und r' die Abstände des Massenelements dm_t von P und P'

bezeichnen. (Die unbedingte Konvergenz dieses Integrals wird später nachgewiesen.) Ebenso wird die Potentialdifferenz der Punkte P_t, P_t' bezüglich F durch das Integral $\int\limits_F dm\left(\frac{1}{r_t}-\frac{1}{r_t'}\right)$ dargestellt. Vergleichen wir nun diese beiden Integrale elementweise, indem wir dm_t jedesmal das Element sein lassen, in welches dm durch die Transformation übergeht, so ist in zwei entsprechenden Integralelementen nicht nur $dm_t = dm$, sondern zufolge des *Ivory*schen Satzes auch $r_t = r$, $r_t' = r'$. Hieraus folgt

$$\int\limits_{F_t} dm_t\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)=\int\limits_{F_0} dm\left(\frac{1}{r_t}-\frac{1}{r_t'}\right). \tag{4.}$$

Da wir bei diesen, die Transformation betreffenden Untersuchungen keine Voraussetzung über das Vorzeichen der Koeffizienten β, γ gebraucht haben, so gelten diese Resultate natürlich für alle Mittelpunktsflächen zweiten Grades. (Beim Ellipsoid und einschaligen Hyperboloid haben wir natürlich nur Dichtigkeiten einerlei Vorzeichens.) Bleiben wir aber beim zweischaligen Hyperboloid stehen und nehmen wir an, daß P und P' auf derselben Schale von F_0, mithin P_t und P_t' auf derselben Schale von F_t liegen. Dann liegen entweder P und P' in einem und demselben Seitengebiete von F_t, in welchem, wie früher gezeigt wurde, F_t keine Anziehung ausübt, also ein konstantes Potential hat, oder aber es liegen umgekehrt P_t und P_t' in demselben Seitengebiete von F_0. In jedem Falle muß eine der Potentialdifferenzen gleich Null sein. Dann ist es aber zufolge (4.) die andere auch. Wir können die Resultate dieses Paragraphen wie folgt zusammenfassen:

Wird ein zweischaliges Hyperboloid homothetisch belegt, so hat das Potential in den beiden seitlichen Raumgebieten je einen konstanten Wert, im mittleren Raumgebiet stellen die Schalen der konfokalen zweischaligen Hyperboloide die Flächen konstanten Potentials dar.

3. *Das Flächenintegral* $\int\limits_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = -\int\limits_F \frac{1}{r^2}\cos\nu\, d\sigma.$

Bezeichnet F_0 ein homothetisch belegtes einschaliges Hyperboloid, O einen Punkt außerhalb F_0 und ordnet man mittels Strahlen durch O die Punkte von F_0 einander paarweise zu, so kann man wie in den Fällen der elliptisch gekrümmten Flächen zeigen, daß die Wirkungen zweier ent-

sprechenden Massenelemente auf O an absoluter Größe gleich sind. Indessen, wo auch O liegen mag, es wird unter den Paaren entsprechender Elemente stets sowohl solche geben, welche, auf verschiedenen Seiten von O gelegen, ihre Wirkungen gegenseitig aufheben, als auch solche, welche, auf derselben Seite von O gelegen, sich in ihren Wirkungen verstärken. Gleichgewicht findet auf keiner Seite der Fläche F_0 statt, auch sind die konfokalen Flächen hier nicht mehr solche konstanten Potentials. Wir erhalten jedoch die den früheren analogen Resultate, wenn wir zwei konfokale Flächen homothetisch so belegen, daß entsprechende Massenelemente absolut gleich aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Das Verfahren, welches wir hierbei einschlagen, ist von dem früheren wesentlich verschieden. Es ist für alle Flächen zweiten Grades geeignet, wird uns also auch die früheren Resultate wieder liefern und zwar, soweit sie das zweischalige Hyperboloid betreffen, in allgemeinerer Form. Den *Ivory*schen Satz werden wir nicht benutzen.

Wir schicken einige Bemerkungen über das Flächenintegral

$$\int_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = -\int_F \frac{1}{r^2} \cos\nu \, d\sigma$$

voraus. — Es bezeichne F eine beliebige Fläche, an welcher eine positive und eine negative Seite unterschieden werden, n die positive Normale, r den von einem willkürlichen, während der Integration unveränderlichen, nicht auf F gelegenen Punkte O nach dem Flächenelement $d\sigma$ gezogenen Radius vector, ν den Winkel zwischen r und n. Das Integral stellt die Zentralprojektion der Fläche F aus dem Punkte O auf die um O beschriebene Einheitskugel dar. Dabei ist die Projektion eines Flächenelementes positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Radius vector von der positiven oder negativen Seite her an das Element herankommt. Werden auf jedem von O ausgehenden Halbstrahl diejenigen Schnittstellen, welche von der positiven zur negativen Seite führen, mit $+1$, die andern mit -1 gezählt, und wird die Summe dieser Zahlen als *Charakteristik* des Halbstrahls, sowie als Charakteristik des entsprechenden Punktes der Einheitskugel bezeichnet, so zerfällt die letztere in Gebiete verschiedener Charakteristik; summiert man diese Gebiete, ein jedes so oft, wie seine Charakteristik angibt, so hat man die Projektion von F, also den Wert des Integrals. Das Integral ist eine

Funktion des Ortes von O, welche sich offenbar nur stetig ändern kann, so lange O nicht durch die Fläche selbst hindurchgeht. Um das Verhalten der Funktion genauer zu erkennen, haben wir zu sehen, wie sich die Charakteristik des Halbstrahls bei kontinuierlicher Bewegung desselben ändert. Es kommen für eine solche Änderung zunächst drei Fälle als möglich in Betracht:

1. der Halbstrahl passiert eine tangentiale Lage,
2. der Halbstrahl passiert einen Rand der Fläche,
3. der Punkt O tritt durch die Fläche hindurch.

Man sieht sofort, daß der erste Fall ausscheidet. Denn im Moment der tangentialen Lage haben wir zwei vereinigte mit $+1$ und -1 zu zählende Punkte, deren Zutritt oder Wegfall die Charakteristik nicht ändert. Dagegen bringt der zweite Fall den Gewinn oder Verlust eines Schnittpunktes, und die Charakteristik ändert sich um ± 1. Es gilt dies auch für die unendlich fernen Berandungen, welche der Halbstrahl in dem Augenblick passiert, wo er die Richtung einer Asymptote hat. — Im dritten Falle endlich ist sofort zu sehen, daß der Übertritt des Punktes O von der positiven zur negativen (negativen zur positiven) Seite die Charakteristik um 1 abnehmen (wachsen) läßt.

Lassen wir jetzt O die Fläche F von der positiven zur negativen Seite durchschreiten und lassen wir die zu O gehörige Einheitskugel und die sämtlichen von O ausgehenden Halbstrahlen mittels einer Parallelverschiebung an dieser Bewegung teilnehmen, so können wir diejenigen Halbstrahlen, welche im Momente des Durchtritts den Rand passieren, gänzlich außer acht lassen, weil sie nur ein Gebiet von geringerer Dimension erfüllen. Die Charakteristik aller übrigen Halbstrahlen vermindert sich um 1, der Wert des Integrals $\int_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\sigma$ daher um 4π. *Die Funktion* $\int_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\sigma$ *springt also, wenn* O *von der positiven (negativen) zur negativen (positiven) Seite von* F *übertritt, um* $-4\pi(+4\pi)$.

Halten wir ferner O fest und lassen wir einen Halbstrahl sich um O drehen, so tritt eine Veränderung der Charakteristik desselben nur beim Passieren der Berandung von F ein. Auf der zu O gehörigen Einheitskugel sind daher die Gebiete verschiedener Charakteristik durch die Linien von

einander getrennt, welche von dem von O ausgehenden nach den Punkten der Berandung führenden Randkegel ausgeschnitten werden.

Nehmen wir nunmehr an, daß die Fläche im Endlichen keinen Rand besitzt, so wird (falls die Fläche sich ins Unendliche erstreckt, also daselbst einen Rand hat), bei einer Bewegung von O der Randkegel nur eine Parallelverschiebung erleiden. Lassen wir nun wieder bei der Bewegung von O das zugehörige Halbstrahlenbündel sich parallel verschieben, so werden diejenigen Halbstrahlen, welche zu Anfang keine Randstrahlen waren, auch niemals den Rand passieren und daher, so lange O nicht durch F hindurchgeht, ihre Charakteristik nicht ändern. Mithin bleibt so lange auch der Wert des Integrals $\int_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma$ unverändert. Also gilt der Satz: *Hat die Fläche F im Endlichen keinen Rand* (wie z. B. Ellipsoid, Paraboloid, hyperbolisches Hyperboloid, eine Schale des elliptischen Hyperboloids usw.), *so bleibt der Wert des Integrals* $\int_F \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma$ *unverändert, so lange O nicht durch die Fläche hindurchgeht.*

4. Ausdehnung der früheren Untersuchungen auf alle Mittelpunktsflächen zweiten Grades.

Die Gleichung (1.) des § 2, in welcher wir nur $\alpha > 0$, $\alpha > \beta > \gamma$ voraussetzen, kann ein Ellipsoid, ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid darstellen. Unter F_0 verstehen wir in den beiden ersten Fällen eine positive homothetische Belegung der Fläche, im dritten Falle aber soll F_0 fortan nur die eine Schale des Hyperboloids bezeichnen, deren Punkte positive Abszissen haben, die homothetische Belegung nehmen wir auch hier positiv. Die andere Schale, aber ebenfalls positiv mit derselben Dichtigkeit in den entsprechenden Punkten belegt, bezeichnen wir mit F_0'. Ferner bedeuten F_t, F_t' diejenigen (materiellen) Flächen, welche durch die Transformation (2.) aus F_0, F_0' hervorgehen, also geometrisch durch die Gleichung (3.) dargestellt werden, endlich $-F_0, -F_0', -F_t, -F_t'$ diejenigen Massenbelegungen, in welche F_0, F_0', F_t, F_t' durch Umkehrung des Vorzeichens der Flächendichtigkeit ϱ übergehen. Jede der betrachteten Flächen teilt den

Raum in zwei Gebiete; die Seite der Fläche, nach welcher sie sich mit wachsendem t bewegt, soll als die positive gelten.

Die Tangentialebene von F_t im Punkte x_t, y_t, z_t hat die Gleichung

$$\frac{x_t}{\alpha+t}\xi+\frac{y_t}{\beta+t}\eta+\frac{z_t}{\gamma+t}\zeta=1. \tag{5.}$$

Da die Flächendichte ϱ in x_t, y_t, z_t dem Abstande der Tangentialebene vom Mittelpunkt proportional ist, so folgt

$$\varrho=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\left(\frac{x_t}{\alpha+t}\right)^2+\left(\frac{y_t}{\beta+t}\right)^2+\left(\frac{z_t}{\gamma+t}\right)^2}}, \tag{6.}$$

wo $\varphi(t)$ auf der Fläche F_t konstant, aber noch eine Funktion von t ist. Für die Komponenten des vom Punkte x_t, y_t, z_t in der Zeit dt zurückgelegten Weges dn erhalten wir die Ausdrücke

$$dx_t=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha(\alpha+t)}\,x\,dt=\frac{1}{2}\frac{x_t}{\alpha+t}\,dt,\quad dy_t=\frac{1}{2}\frac{y_t}{\beta+t}\,dt,\quad dz_t=\frac{1}{2}\frac{z_t}{\gamma+t}\,dt, \tag{7.}$$

deren Proportionalität mit den Koeffizienten in Gleichung (5.) besagt, daß die Bewegung normal zur Fläche verläuft. Es wird ferner

$$dn=\sqrt{dx_t^2+dy_t^2+dz_t^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x_t}{\alpha+t}\right)^2+\left(\frac{y_t}{\beta+t}\right)^2+\left(\frac{z_t}{\gamma+t}\right)^2}\,dt,$$

$$\varrho\,.\,dn=\frac{1}{2}\varphi(t)\,dt. \tag{8.}$$

Wählen wir nun im Raum zwei feste Punkte P_1, P_2, und lassen wir F_t die konfokale Schar durchlaufen, so ist die Potentialdifferenz von P_1 und P_2 bezüglich F_t eine Funktion von t, dargestellt durch den Ausdruck

$$\psi(t)=\int_{F_t} dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right), \tag{9.}$$

wo r_1 und r_2 den Abstand des Elementes dm von P_1 und P_2 bezeichnen. Die Differentiation nach t ergibt

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\int_{F_t} dm\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\partial t}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial t}\right)=\int_{F_t}\varrho\,d\sigma\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}\right)\frac{dn}{dt},$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\frac{1}{2}\varphi(t)\left(\int_{F_t}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n}\,d\sigma-\int_{F_t}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}\,d\sigma\right). \tag{10.}$$

Liegen nun P_1 und P_2 auf derselben Seite von F_t, so haben nach dem letzten Satz in § 3 die beiden in (10.) auftretenden Integrale denselben Wert und es wird $\frac{d\psi(t)}{dt}=0$. Daraus ergibt sich der Fundamentalsatz:

I'. *So lange während der Bewegung von F_t die festen Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite von F_t liegen, bleibt ihre Potentialdifferenz $\psi(t)$ konstant.*

Liegen P_1 und P_2 auf derselben Fläche $F_{t'}$ der Schar, so liegt bezüglich jeder Fläche der Schar P_1 auf derselben Seite wie P_2. Daraus folgt:

II'. *Die Potentialdifferenz zweier Punkte P_1 und P_2, die auf derselben Fläche der konfokalen Schar liegen, hat für alle Flächen der Schar einen und denselben Wert.*

Durch irgend zwei Flächen F_a und F_b der Schar wird der Raum in drei Gebiete, ein *mittleres* und zwei *Seitengebiete*, eingeteilt. Liegen P_1 und P_2 entweder beide in demselben Seitengebiete oder auf einer und derselben konfokalen Fläche des Mittelgebietes, so folgt aus I' bezw. II', daß ihre Potentialdifferenz bezüglich F_a denselben Wert hat wie bezüglich F_b. Für das aus F_a und $-F_b$ zusammengesetzte System F_a-F_b ist daher die Potentialdifferenz gleich Null. Damit haben wir die Sätze:

I. *Das Potential des Systems F_a-F_b hat in jedem der Seitengebiete je einen konstanten Wert.*

II. *In dem Gebiete zwischen F_a und $-F_b$ sind für das System F_a-F_b die konfokalen Flächen zugleich Niveauflächen.*

Damit ist das gesuchte Resultat gefunden.

Im Falle des zweischaligen Hyperboloides, in welchem F_t nur die Schale mit positiven Abszissen bezeichnet, gelten die Sätze I, II natürlich auch für ein System von der Form $F'_a-F'_b$. Daß sie aber auch für Systeme von der Form $F_a-F'_b$ (oder F'_a-F_b) gelten, ist ebenfalls leicht zu erkennen. Wenn nämlich t sich der unteren Grenze $-\alpha$ nähert, nähern sich die beiden Schalen F_t und F'_t unbegrenzt der yz-Ebene, und es existiert eine Belegung dieser Ebene, welche einen stetigen Übergang von den Flächen F_t zu den Flächen F'_t vermittelt. Faßt man daher alle Flächen F_t, alle Flächen F'_t, sowie die erwähnte Belegung der yz-Ebene unter dem Namen der konfokalen Schar zusammen, so gelten auch für eine diese ganze Schar durchlaufende Fläche die Sätze I' und II', und mithin auch die Sätze I, II für Systeme von der Form $F_a-F'_b$. Für $a=b$ gewinnen wir das in § 2 auf anderem Wege erhaltene Resultat wieder.

Ist F_0 ein Ellipsoid und liegen P_1 und P_2 entweder innerhalb F_0 oder auf einem konfokalen Ellipsoid außerhalb F_0, so bleibt, wenn t von 0 bis ∞ wächst, nach I′ und II′ die Potentialdifferenz von P_1 und P_2 ungeändert. Für $t=\infty$ aber wird sie Null, weil jedes der Integrale $\int \frac{dm}{r_1}$, $\int \frac{dm}{r_2}$ für sich gleich Null wird. Mithin hat auch schon das Potential von F_0 in P_1 und P_2 denselben Wert, und wir erhalten so die bekannten beiden Sätze für das Ellipsoid.

5. *Berechnung des Potentials.*

Es soll jetzt die Potentialdifferenz zweier Punkte P_1, P_2 für ein System von der Form $F_a - F_b$ bestimmt werden. Wir können uns auch im Falle des elliptischen Hyperboloids auf Systeme von dieser Form beschränken. Denn die Potentialdifferenz von P_1 und P_2 für ein System $F'_a - F'_b$ ist offenbar gleich derjenigen der zu P_1, P_2 in bezug auf die yz-Ebene symmetrisch gelegenen Punkte für das System $F_a - F_b$; und ein System von der Form $F_a - F'_b$ kann in $(F_a - F_{-a}) + (F'_{-a} - F'_b)$ zerlegt werden, da F_t und F'_t für $t = -\alpha$ in dieselbe Belegung der yz-Ebene übergehen. Da ferner das Potential von $F_a - F_b$ in dem an $F_a (F_b)$ angrenzenden Seitengebiet denselben Wert wie auf $F_a (F_b)$ besitzt, so brauchen wir nur Punkte zwischen F_a und F_b in Betracht zu ziehen. Den Wert des Potentials denken wir uns für einen beliebigen Punkt des Raumes willkürlich festgesetzt, dann ist er für alle Punkte bestimmt. Bezeichnen wir den Wert des Potentials in einem Punkte P mit $V(P)$ oder auch den für alle Punkte einer Fläche F_t gemeinsamen Wert mit $V(t)$, und sind ferner F_{t_1} und F_{t_2} die Flächen, auf denen die Punkte P_1 und P_2 liegen, so wird $V(P_2) - V(P_1) = V(t_2) - V(t_1)$.

Bezeichnet, wie in § 4, $\psi(t)$ die Potentialdifferenz der beiden (festen) Punkte P_1, P_2 bezüglich einer einzelnen materiellen Fläche F_t, so ist

$$(11.) \qquad V(t_2) - V(t_1) = \psi(a) - \psi(b) = \int_b^a \frac{d\psi(t)}{dt}\, dt.$$

Nehmen wir $a \geqq t_2 \geqq t_1 \geqq b$ an. Dann liegen für $b \leqq t < t_1$ und $t_2 < t \leqq a$ P_1 und P_2 auf derselben, für $t_1 < t < t_2$ auf verschiedenen Seiten von F_t. Da nun das über eine Fläche F_t erstreckte für einen Punkt O genommene Integral $\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma$ nach § 3 bei Bewegung des Punktes O konstant bleibt,

so lange O nicht durch die Fläche tritt, beim Übertritt von der negativen zur positiven Seite aber um 4π wächst, so ist die in (10.) auftretende Differenz $\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} d\sigma - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} d\sigma$ für $t_1 < t < t_2$ gleich 4π, sonst gleich Null und wir erhalten aus (10.) und (11.)

$$V(t_2) - V(t_1) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt. \tag{12.}$$

Nunmehr ist noch $\varphi(t)$ zu bestimmen. Hierzu führt folgende Überlegung: Wird durch eine affine Transformation $x' = ax$, $y' = by$, $z' = cz$ ein Flächenelement $d\sigma$, dessen Normale die Richtungskoeffizienten $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ hat, in $d\sigma'$ übergeführt, so ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = a\,b\,c \sqrt{\frac{\cos^2 A}{a^2} + \frac{\cos^2 B}{b^2} + \frac{\cos^2 C}{c^2}}.$$

Wenden wir dies auf die Transformation (2.) und das im Punkte $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ der Fläche F_0 gelegene Element $d\sigma = d\sigma_0$ an, dessen entsprechendes auf F_t $d\sigma_t$ heißen möge, so wird, wenn wir noch zur Abkürzung

$$W(t) = \sqrt{(\alpha+t)(\beta+t)(\gamma+t)}, \quad \chi(t) = \sqrt{\left(\frac{x_t}{\alpha+t}\right)^2 + \left(\frac{y_t}{\beta+t}\right)^2 + \left(\frac{z_t}{\gamma+t}\right)^2} \tag{13.}$$

setzen,

$$\frac{d\sigma_t}{d\sigma_0} = \frac{W(t)}{W(0)} \cdot \frac{\chi(t)}{\chi(0)}. \tag{14.}$$

Da sich die Dichtigkeiten der Massen in $d\sigma_0$ und $d\sigma_t$ nach (6.) wie $\frac{\varphi(0)}{\chi(0)} : \frac{\varphi(t)}{\chi(t)}$ verhalten, so verhalten sich ihre Massen wie $W(0)\cdot\varphi(0) : W(t)\cdot\varphi(t)$. Andererseits aber enthalten ja beide Elemente genau dieselbe Masse, also ist $\varphi(t) = \frac{W(0)\cdot\varphi(0)}{W(t)}$ und es wird nach (12.), (13.)

$$\left\{\begin{aligned} V(t_2) - V(t_1) &= 2\pi\cdot\varphi(0) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt\, W(0)}{W(t)} \\ &= 2\pi \sqrt{|\alpha\beta\gamma|}\, c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{|(\alpha+t)(\beta+t)(\gamma+t)|}}, \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

wo $c = \varphi(0)$ natürlich erst bestimmt ist, nachdem für irgend einen Punkt von F_0 die Dichtigkeit willkürlich festgesetzt ist. — Auf die weitere Behandlung dieses bekannten Integrals gehen wir hier nicht ein.

6. Fälle, in denen bei unendlicher Ausdehnung der Massen Anziehung und Potentialdifferenz bestimmte endliche Werte haben.

Es bezeichne P_0 einen beliebigen Punkt, r_0 die Strecke von P_0 zum Massenelement dm, ω den Winkel zwischen r_0 und einer beliebigen Richtung ν. Dann wird die nach der Richtung ν genommene Komponente der auf P_0 ausgeübten Kraft durch das über die ganze Masse zu erstreckende Integral $\int \frac{dm}{r_0^2}\cos\omega$ dargestellt. Soll eine bestimmte endliche Kraft vorhanden sein, so muß für jede Richtung ν dieses Integral unbedingt konvergieren, und hierfür ist notwendig und hinreichend, daß das aus den absoluten Werten seiner Elemente gebildete Integral $\int \frac{|dm|}{r_0^2}|\cos\omega|$ endlich bleibt. Ziehen wir durch P_0 diejenigen Halbstrahlen, welche mit ν einen bestimmten spitzen Winkel, etwa 60^0, bilden, so muß, da für alle dm innerhalb des von diesen Strahlen gebildeten Rotationskegels $\cos\omega \geqq \frac{1}{2}$ ist, auch das über das Innere dieses Kegels erstreckte Integral $\int \frac{|dm|}{r_0^2}$ endlich sein. Da dies für jede Richtung ν gilt, so erhalten wir als notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer bestimmten endlichen Kraft die Endlichkeit des über die ganze Masse erstreckten Integrals $\int \frac{|dm|}{r_0^2}$. Ist andererseits diese Bedingung erfüllt, so kann man leicht rückwärts schließen, daß eine bestimmte endliche Kraft im Punkte P_0 existiert.

Wir wollen nun annehmen, daß in der Tat für irgend einen Punkt P_0 das Integral $\int \frac{|dm|}{r_0^2}$ endlich sei. Sind dann P_1, P_2 irgend zwei Punkte r_1, r_2 ihre Abstände von dm, so bleibt für alle dm außerhalb zweier mit beliebig kleinem Radius ϱ um P_1 und P_2 beschriebener Kugeln der Quotient $\frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2} : \frac{|dm|}{r_0^2} = \frac{r_0^2}{r_1 \cdot r_2}$ unterhalb einer (nach Wahl von ϱ) angebbaren Größe. Mithin muß auch das über die Massen außerhalb der Kugeln erstreckte Integral $\int \frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2}$ endlich sein. Von dem über die ganze Masse erstreckten Integral $\int \frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2}$ können wir also sagen, daß es endlich ist, sofern nicht die Elemente in der Umgebung von P_1 oder P_2 einen unendlich großen Beitrag liefern, also z. B. sicher dann, wenn P_1 und P_2 außerhalb der Masse liegen. Nehmen wir $P_1 = P_2$, so sehen wir, daß überall außerhalb der Masse eine bestimmte Anziehung besteht. — In gleicher Weise erkennt man, daß das Integral $\int dm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$, die Potentialdifferenz der beiden Punkte P_1

und P_2, durch die unendliche Ausdehnung der Masse nicht unendlich oder unbestimmt werden kann. Denn es ist $\left| dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\right| = \frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2}|r_1-r_2|$ $\leqq \frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2} \cdot \overline{P_1 P_2}$. Halten wir P_1 fest und lassen P_2 an P_1 so heranrücken, daß $\overline{P_1 P_2}$ eine feste Richtung ν hat, teilen wir ferner die ganze Masse M durch eine Kugel mit beliebig großem Radius ϱ in zwei Teile, M_ϱ innerhalb, M'_ϱ außerhalb der Kugel gelegen, so wird

$$\frac{1}{P_1 P_2}\int_M dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{P_1 P_2}\int_{M_\varrho} dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{1}{P_1 P_2}\int_{M'_\varrho} dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Für $\lim P_2 = P_1$ geht das erste Glied der rechten Seite in die nach der Richtung ν genommene Komponente der von M_ϱ ausgeübten Kraft d. i. in $\int_{M_\varrho} \frac{dm}{r_1^2}\cdot\cos\omega$ über. Das zweite Glied ist dem absoluten Werte nach $\leqq \frac{1}{P_1 P_2}\int_{M'_\varrho}\frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2}|r_1-r_2| \leqq \int_{M'_\varrho}\frac{|dm|}{r_1 \cdot r_2}$ und wird daher mit wachsendem ϱ unendlich klein. Daraus schließt man in bekannter Weise, daß auch

$$\lim_{P_2=P_1}\frac{1}{P_1 P_2}\int_M dm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\int_M \frac{dm}{r_1^2}\cos\omega$$

ist, daß also die Kraftkomponente nach der Richtung ν durch Differentiation des Potentials in dieser Richtung gewonnen wird. In gleicher Weise kann man zeigen, daß unter der gemachten Voraussetzung, auch für die höheren Ableitungen alle für Massen von endlicher Ausdehnung bestehenden Sätze giltig bleiben.

Um die früher angewandten Schlußweisen zu rechtfertigen, haben wir also den Nachweis zu führen, daß für irgend einen Punkt das über eine homothetisch belegte Fläche F_t erstreckte Integral $\int \frac{dm}{r^2}$ endlich ist. Dies soll in § 7 geschehen. Setzen wir es für den Augenblick als geschehen voraus, so bedarf nur noch die Differentiation unter dem Integralzeichen, durch welche Gleichung (10.) aus (9.) abgeleitet wurde, einer Rechtfertigung. Natürlich muß angenommen werden, daß für die Stelle t, an welcher differentiiert wird, F_t keinen der Punkte P_1, P_2 enthält. Andernfalls existiert $\frac{d\psi(t)}{dt}$ nicht; für den Durchgang von F_t durch P_1 oder P_2 genügt es aber auch zu wissen, daß $\psi(t)$ existiert und stetig ist, und dies ist eine

einfache Folge des Satzes, daß das Potential einer endlichen Flächenbelegung auch für einen Punkt in der Fläche existiert und beim Durchgang durch die Fläche stetig ist, ein Satz, der offenbar auch für unendlich ausgedehnte Flächen gilt, falls die oben angegebene Voraussetzung erfüllt ist. Wir können uns ferner auf die Herleitung der Differentiation an der Stelle $t=0$ beschränken, da ja die Fläche F_0 durch jede beliebige Fläche der konfokalen Schar ersetzt werden kann. Hiernach handelt es sich um den Nachweis, daß $\lim\limits_{t=0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}$ existiert und gleich $\int dm \left(\left(\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial t} \right)_{t=0} - \left(\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial t} \right)_{t=0} \right)$ ist, vorausgesetzt, daß P_1 und P_2 nicht auf F_0 liegen. Ferner können wir uns auf die Betrachtung nur eines nicht in F_0 gelegenen Punktes P beschränken und haben dann den Nachweis zu führen, daß der Ausdruck

$$J=\int \frac{\frac{1}{r(t)}-\frac{1}{r(0)}}{t}\, dm \tag{16.}$$

für $t \neq 0$ als endlicher Wert existiert und für $\lim t=0$ den limes $\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r(t)}}{\partial t} \right)_{t=0} dm$ hat. Dabei bedeutet $r(t)$ den Abstand des Punktes P von dem Element dm_t der Fläche F_t, welches dem Element dm der Fläche F_0 entspricht. Ist dieser Nachweis geführt, so brauchen wir ihn nur auf die Punkte P_1 und P_2 anzuwenden, um das gewünschte Resultat zu haben. Nun ist aber, wenn a, b, c die Koordinaten von P, x, y, z die Koordinaten von dm, x_t, y_t, z_t die Koordinaten von dm_t sind, unter Berücksichtigung von (2.)

$$\begin{cases} (r(t))^2=(x_t-a)^2+(y_t-b)^2+(z_t-c)^2=x^2+y^2+z^2+t \\ \qquad +a^2+b^2+c^2-2\left(a x\sqrt{1+\frac{t}{\alpha}}+b y\sqrt{1+\frac{t}{\beta}}+c z\sqrt{1+\frac{t}{\gamma}}\right), \end{cases} \tag{17.}$$

ferner nach dem *Taylor*schen Satze

$$\sqrt{1+\frac{t}{\alpha}}=1+\frac{1}{2}\frac{t}{\alpha}+\frac{1}{2}A t^2$$

$$\sqrt{1+\frac{t}{\beta}}=1+\frac{1}{2}\frac{t}{\beta}+\frac{1}{2}B t^2$$

$$\sqrt{1+\frac{t}{\gamma}}=1+\frac{1}{2}\frac{t}{\gamma}+\frac{1}{2}I' t^2,$$

wo A, B, I' stetige Funktionen von t sind und für $t=0$

$$\lim A=-\frac{1}{4\alpha^2},\ \lim B=-\frac{1}{4\beta^2},\ \lim I'=-\frac{1}{4\gamma^2} \text{ ist.} \tag{18.}$$

Hieraus folgt weiter

$$\big(r(t)\big)^2-\big(r(0)\big)^2=t\Big(1-\frac{ax}{\alpha}-\frac{by}{\beta}-\frac{cz}{\gamma}\Big)-t^2(Aax+Bby+I'cz),$$

$$\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{r(t)}-\frac{1}{r(0)}\Big)=\frac{1}{(r(0)+r(t))r(0)r(t)}\Big(\frac{ax}{\alpha}+\frac{by}{\beta}+\frac{cz}{\gamma}-1+t(Aax+Bby+I'cz)\Big).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(19.)\qquad (r(0)+r(t))\cdot r(0)\cdot r(t)=u,$$

so haben wir den Nachweis der Existenz des Integrals J geführt, wenn wir die Existenz der Integrale

$$(20.)\quad A=\int\frac{x}{u}dm,\quad B=\int\frac{y}{u}dm,\quad C=\int\frac{z}{u}dm,\quad D=\int\frac{dm}{u}$$

nachgewiesen haben; und zwar wird alsdann

$$(21.)\qquad J=\Big(\frac{a}{\alpha}+tA\Big)A+\Big(\frac{b}{\beta}+tB\Big)B+\Big(\frac{c}{\gamma}+tI'\Big)C-D$$

sein. Für den vorliegenden Zweck genügt es, nach Annahme einer positiven Größe η die Existenz der Integrale A, B, C, D für alle t zwischen $-\eta$ und $+\eta$ zu beweisen. Dieses η wählen wir so, daß P weder zwischen den Flächen F_η und $F_{-\eta}$ noch auf einer dieser Flächen liegt. Dies ist, da P nicht auf F_0 liegt, möglich. Alsdann liegen alle vorkommenden $r(t)$ oberhalb einer angebbaren von 0 verschiedenen positiven Größe ε und dasselbe gilt daher für u. $\frac{1}{u}$ wird eine gleichmäßig stetige Funktion von t in dem betrachteten Gebiet, und wenn wir durch eine um den Anfangspunkt der Koordinaten mit beliebig großem Radius ϱ beschriebene Kugel die ganze Masse M von F_0 in zwei Teile M_ϱ innerhalb, M'_ϱ außerhalb der Kugel befindlich, zerlegen, so folgt aus der letzten Bemerkung, daß die von der endlichen Masse M_ϱ herrührenden Teile der Integrale A, B, C, D nicht nur bestimmt und endlich, sondern daß sie auch stetige Funktionen von t sind. Bezeichnen wir nun mit r' den Abstand des Massenelementes dm vom Anfangspunkt, so wird $r'^2=x^2+y^2+z^2$, und aus (17.) folgt, daß für hinlänglich groß gewähltes ϱ der Quotient $\frac{(r(t))^2}{r'^2}$ und mithin auch der Quotient $\frac{r(t)}{r'}$ für alle Elemente von M'_ϱ und für alle betrachteten Werte von t von 1 beliebig wenig verschieden ist. Aus (19.) folgt alsdann, daß u von $2r'^3$ beliebig wenig abweicht, also sicher $>r'^3$ ist. Da nun $|x|\leqq r'$, $|y|\leqq r'$, $|z|\leqq r'$ und

auf M'_ϱ überall $r' \geqq \varrho$, also bei hinlänglich großem ϱ $r' > 1$ ist, so bleiben daselbst die Integranden $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}, \frac{1}{u}$ ihrem absoluten Werte nach unter $\frac{1}{r'^2}$. Da ferner das Integral $\int\limits_{M'_\varrho} \frac{dm}{r'^2}$ einen bestimmten endlichen Wert besitzt, welcher demnach mit wachsendem ϱ unendlich klein wird, so folgt, daß auch die Integrale $\int\limits_{M'_\varrho} \frac{x}{u} dm$, $\int\limits_{M'_\varrho} \frac{y}{u} dm$, $\int\limits_{M'_\varrho} \frac{z}{u} dm$, $\int\limits_{M'_\varrho} \frac{dm}{u}$ bestimmte endliche Werte haben und mit wachsendem ϱ gleichmäßig für alle betrachteten Werte von t unendlich klein werden. Hieraus und aus der Stetigkeit der auf M_ϱ bezüglichen Teile der Integrale A, B, C, D folgt nun, daß diese Integrale selbst existieren und in dem betrachteten Gebiete stetige Funktionen von t sind. Dann ergibt sich aber, daß die rechte Seite von (21.) eine stetige Funktion von t ist, daß J für $t \neq 0$ existiert und für $t = 0$ einen limes besitzt, der zufolge (19.), (20.) durch das Integral $\int \frac{1}{2(r(0))^3} \left(\frac{ax}{\alpha} + \frac{by}{\beta} + \frac{cz}{\gamma} - 1\right) dm$ dargestellt wird. Daß hier der Integrand gleich $\frac{\partial \frac{1}{r(t)}}{\partial t}$ für $t = 0$ ist, ergibt sich durch Ausführung der Differentiation unter Benutzung von (17.) sofort.

7. *Nachweis der Endlichkeit der Integrale* $\int\limits_F \frac{dm}{r^2}$.

Ist eine gerade Linie g überall mit Masse von der konstanten Dichtigkeit k belegt, n irgend ein reeller Wert, P ein Punkt im Abstande e von der Geraden, so wird das über die Masse dieser Geraden erstreckte und für den Punkt P genommene Integral $\int\limits_g \frac{dm}{r^n}$ gleich

$$2k \int_0^\infty \frac{ds}{(e^2+s^2)^{\frac{n}{2}}},$$

und da der Integrand für $s = \infty$ unendlich klein von der Ordnung n wird, so folgt, daß das Integral $\int\limits_g \frac{dm}{r^n}$ dann und nur dann endlich ist, wenn $n > 1$ ist.

Auf diesen Fall der homogenen Geraden läßt sich nun die Untersuchung des über ein homothetisch belegtes Hyperboloid erstreckten Integrals $\int \frac{dm}{r^n}$ leicht zurückführen. (Im Falle des Ellipsoides hat natürlich

dieses Integral für jedes n ein endlichen Wert.) Bezeichnen $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ die Richtungskosinus der Normale der Fläche F_0 im Punkte x, y, z und ist ϱ die Dichtigkeit in diesem Punkte, so wird

$$\frac{\varrho}{\cos A} = \frac{k\alpha}{x}, \quad \frac{\varrho}{\cos B} = \frac{k\beta}{y}, \quad \frac{\varrho}{\cos C} = \frac{k\gamma}{z},$$

wo k für alle Punkte denselben Wert hat. — Es sei nun F_0 die eine Schale eines elliptischen Hyperboloids. Dann können wir in Gleichung (1.) α, β, γ durch $a^2, -b^2, -c^2$ ersetzen, wo a, b, c positiv $(b \leqq c)$ sind. Zwei zur yz-Ebene parallele Ebenen in den Abständen $x\ (>a)$ und $x+dx$ schneiden aus F_0 ein von zwei Ellipsen begrenztes Stück aus, dessen Masse sich leicht berechnen läßt. Zu dem Zweck denken wir uns diese Masse auf die yz-Ebene projiziert. Sie wird alsdann das von den beiden Ellipsen mit den Gleichungen

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{(x+dx)^2 - a^2}{a^2}$$

begrenzte Flächenstück homogen, nämlich mit der Dichtigkeit $\frac{\varrho}{\cos A} = \frac{ka^2}{x}$ ausfüllen. Nun hat die erste Ellipse die Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $\frac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, also den Flächeninhalt $\pi \cdot \frac{bc}{a^2}(x^2-a^2)$, entsprechend die zweite den Inhalt $\pi \cdot \frac{bc}{a^2}((x+dx)^2-a^2)$. Der Inhalt der von beiden Ellipsen begrenzten Fläche beträgt daher $2\pi x dx \frac{bc}{a^2}$, und die auf derselben ausgebreitete Masse $2\pi x dx \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ka^2}{x} = 2\pi k b c dx$. Hieraus folgt: Wird die Masse von F_0 auf die x-Achse projiziert, so erhält man eine homogene von $x=a$ bis $x=+\infty$ reichende Belegung dieser Achse, und zwar beträgt die Dichtigkeit $2\pi k b c$. — Es bezeichne jetzt r die Entfernung eines Elementes der Fläche F_0 vom Anfangspunkt, r' die Entfernung seiner Projektion auf die x-Achse vom Anfangspunkt. Sind dann x, y, z die Koordinaten des Elementes von F_0, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x^2$$

und aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(b \leqq c)$ des Hyperboloids folgt,

$$1 \leqq \frac{r^2}{r'^2} = 1 + \frac{y^2+z^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2+z^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{x^2} \leqq 1 + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{c^2}{x^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\frac{c^2}{x^2} = 1 + \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{x^2} < 1 + \frac{c^2}{a^2}.$$

Da somit der Quotient $\frac{r}{r'}$ beständig zwischen den festen Grenzen 1 und $\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}$ liegt, so folgt, daß für jedes n die Integrale $\int \frac{dm}{r^n}$ und $\int \frac{dm}{r'^n}$ entweder beide endlich oder beide unendlich groß sein müssen. Von dem letzteren Integral, welches sich über eine homogene Gerade erstreckt, wurde aber gezeigt, daß es endlich ist, sobald $n>1$ ist. Da es bezüglich der Endlichkeit gleichgültig ist, für welchen Punkt außerhalb der Masse das Integral genommen wird, so folgt, daß das über ein homothetisch belegtes elliptisches Hyperboloid erstreckte Integral $\int \frac{dm}{r^n}$ dann und nur dann außerhalb der Masse endlich ist, wenn $n>1$ ist.

In ganz ähnlicher Weise kann dasselbe für das einschalige homothetisch belegte Hyperboloid bewiesen werden, indem zunächst gezeigt wird, daß die Projektion seiner Masse auf die z-Achse eine homogene Belegung dieser Achse ergibt.

Aus alledem folgt, daß zwar das gewöhnlich zur Bestimmung des Potentials verwendete Integral $\int \frac{dm}{r}$ bei hyperboloidischen Schalen unendlich groß wird, daß dagegen das Integral $\int \frac{dm}{r^2}$ endlich bleibt, und somit Potentialdifferenzen und Anziehungskräfte einen bestimmten Sinn behalten.

Dies gilt nicht nur für alle wirklichen Flächen zweiten Grades F_t der Schar, sondern, wie sich leicht zeigen läßt, auch in den Grenzfällen, wo t einen der Werte $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ hat und die Masse eine Ebene bezw. einen Teil einer Ebene in bestimmter Weise bedeckt. Es lassen sich ferner diese Betrachtungen ausdehnen sowohl auf Paraboloide wie auf Kegel und Zylinder zweiten Grades. Dabei erfordert die Untersuchung der Paraboloide, obgleich sie natürlich nach ganz denselben Prinzipien erfolgen kann, doch im einzelnen kompliziertere Betrachtungen. Auszuschließen ist der Fall der in zwei Ebenen zerfallenden Fläche zweiten Grades, weil in diesem Falle das Integral $\int \frac{dm}{r^2}$ nicht mehr endlich ist.

Berlin-Wilmersdorf, den 7. Dezember 1905.

177

GENERAL
UNIV. O
JAN 2

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 129.

Heft III/IV.

Ausgegeben den 5. Januar.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1906.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 129. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Mertens, F., Ein Beweis des Satzes, daß jede Klasse von ganzzahligen primitiven binären quadratischen Formen des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht . . . . . Seite 181

Hurwitz, A., Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen . . . . . — 187

Wirtinger, W., Über eine besondere *Dirichlet*sche Reihe . . . . . — 214

Minkowski, H., Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz . . . — 220

Picard, E., Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes . — 275

Schlesinger, L., Über die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte . . . . . — 287

Steinitz, E., Über die Anziehung hyperboloidischer Schalen . . . . . — 295

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.

R. FRIEDLÄNDER & SOHN in BERLIN NW. 6

Buchhandlung für Naturwissenschaften und Mathematik

offerieren:

Acta Mathematica. Vol. 1—24. 1882—1900. 4. d.-rel. et br. . . . . M. 300.—

American Journal of Mathematics ed. by Sylvester, Peirce, Newcomb. Vol. 1—17 and Index. Baltimore 1878—94. 4°. . . . . M. 460.—

Annalen, Mathematische, von Clebsch und Neumann. Band 1—27. 1869—86. Hlnwdb. . . . . M. 640.—

Annalen der Physik von Poggendorff und Wiedemann. Jahrg. 1863—1900, mit Jubelband und Registern, gebd. und br. . . . . M. 950.—

— Beiblätter zu den Annalen der Physik von Wiedemann. Band 1—24. 1877—1900. (420 M.) . . . . . M. 280.—

Annales de Mathématiques pures et appliquées réd. p. Gergonne. 22 vols cplt. 1810—31. 4°. cart. . . . . M. 1250.—

Annales, Nouvelles, de Mathématiques, p. Terquem, Gerono, Prouhet. Tome 1 à 47. 1842—88. (705 Fr.) dem. rel. et br. . . . . M. 390.—

Annali di Matematica, di B. Tortolini. 8 voll. Nuova Serie 7 voll. 4°. 1850—65 M. 360.—

— dir. da Brioschi e Cremona. Vol. 1—22. 1867—92. 4° . . . . . M. 400.—

Bibliotheca Mathematica, p. Eneström. 6 vols. 1884—89. d.-rel. . . . . M. 20.—

Bulletin des Sciences mathém. phys. p. Férussac, 16 vols. cpl. 1824—31 . . M. 75.—

Cambridge Mathemat. Journal. Ed. by Ellis, Gregory, Cayley etc. 4 vols. 1839—43. — The Cambridge and Dublin Mathemat. Journal, ed. by Sir W. Thomson and Ferrers. 9 vols. 1846—54. — Lwdb. . . . . M. 400.—

Catalogue of Scientific Papers published in 1800—1883. Ed. by the Royal Society of London. 12 vols. 4. 1867—1902. Lwdbde. (270 M.) . . . . M. 210.—

Correspondance math. et phys., publ. p. A. Quetelet et Garnier (Chasles, Verhulst etc.). Complète en 11 vols. 1825—39 . . . . . M. 210.—

Encyclopädie der mathemat. Wissenschaften, herausgegeben von W. Meyer, Burkhardt, F. Klein u. a. Band 1—5 in 10 Teilen soweit bis 1904 erschienen 1898—1904. Hfz. u. br. (126 M.) . . . . . M. 96.—

Encyclopädie der Naturwissenschaften (Mathematik, Physik und Astronomie) von Schlömilch, Valentiner, Winkelmann u. a. 43 Bände. 1880—99 (ungeb. 615 M.) Schönes Expl. in Orig.-Hlbfrzb. . . . . M. 180.—

Fortschritte der Physik, von der physikal. Gesellschaft in Berlin. Jahrg. 1—36: 1845—80 mit Reg. (ungeb. 560 M.) Schönes Expl. in Hlbfrzbd. . . . M. 300.—

— Dieselben Jahrgänge 37—55: 1881—99 br. (1261 M.) . . . . . M. 690.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann, Müller, Lampe u. a. Jahrgang 1—27: 1868—99 (ungeb. 600 M.) Hlbfrzbd. Schönes Exemplar . . . . . M. 350.—

Journal de l'Ecole Polytechnique. Vol. 1—50 av. table. 1796—1870. 4. cart. M. 460.—

Journal de Mathématiques p. Liouville. Série I et II. 39 vols. 1836—74. 4. (1170 Frcs.) . . . . . M. 540.—

Journal für Mathematik, von Crelle und Borchardt, Weierstrass u. a. Band 1—124. 1826—1902. 4°. Mit Generalreg. gebd. Originaldruck . M. 2200.—

— dasselbe, Band 58—106. 1860—91. 4°. Originaldruck . . . . . M. 650.—

Naturae Novitates. Vollst. Bibliographie der Naturgeschichte, Mathematik, Physik etc. Jahrg. 1—26. 1879—1904 mit alphabet. Register (104 M.) . M. 74.—

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. From the beginning in 1665 to 1878 at large (unabridged) 168 vols. 4°. Complete Set of the whole Series, bound hf. cf. and cloth . . . . . M. 3780.—

— Proceedings of the Royal Society of London. Vol. 1—72. 1800—1904 . . M. 620.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgeg. von Schlömilch und Cantor. Jahrg. 1—45. 1856—1900. Mit 8 Supplem. und Generalreg. Hlnwdb. u. br. M. 680.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwiss. Unterricht, von Hoffmann. Jahrgang 1—17. 1870—86 . . . . . M. 180.—

Vorrätig bei **R. Friedländer & Sohn in Berlin NW. 6, Karlstraße 1**

Kataloge auf Verlangen.